

Zasady formułowania probabilistycznych modeli deszczów maksymalnych

The principles for formulating the heavy rainfall probabilistic models

Marcin Wdowikowski, Katarzyna Wartalska, Bartosz Kaźmierczak, Andrzej Kotowski^{*)}

Słowa kluczowe: hydrologia, rozkłady prawdopodobieństwa, modelowanie deszczów maksymalnych

Streszczenie

Zaprezentowane w pracy zasady formułowania probabilistycznych modeli na wysokość deszczów maksymalnych, opracowane na Politechnice Wrocławskiej w latach 2010–2015 [10, 12, 21], po modyfikacjach z 2019 [8] i 2020 roku [9], mogą mieć charakter uniwersalny. Proponowany pięćdziesięcioletni okres pomiarowy, do wyodrębnienia metodą POT niezależnej próby losowej deszczów, jest odpowiedni do wiarygodnej oceny częstości ich występowania od $C = 1$ rok do $C = 50$ lat. Do opisu wysokości deszczów maksymalnych, spośród ośmiu możliwych do zastosowania teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa, wskazano na przydatność dwóch rozkładów: Weibulla i GED. Ujednolicenie metodyki tworzenia modeli deszczów maksymalnych w Polsce umożliwi poprawne fizycznie wzajemne porównywanie ich lokalnych wysokości i da podstawę do szacowania trendów zmian w przyszłości.

Keywords: hydrology, probability distribution, heavy rainfall modelling

Abstract

The principles presented in this paper for formulating heavy rainfall probabilistic models developed at the Wrocław University of Science and Technology in 2010–2015 [2, 12, 15] after the modifications of 2019 [18] and 2020 [20] can be universal. The proposed 50-year measurement period for extracting an independent random sample of rain using the POT method is suitable for reliably assessing the frequency of occurrence from $C = 1$ to $C = 50$ years. To describe the height of the maximum rain, from among eight possible theoretical probability distributions, the usefulness of two distributions was indicated: Weibull and GED. The unification of the methodology for creating models of maximum rain in Poland will enable physically correct mutual comparison of their local heights and provide a basis for estimating trends of change in the future.

1. Wprowadzenie

Projektowanie systemów odwodnień terenów zurbanizowanych napotyka w Polsce na podstawową trudność, wynikającą z braku wiarygodnego modelu deszczów. Najczęściej dotychczas stosowana fizykalna formuła Błaszczyka z 1954 roku [1], oparta na pomiarach z przełomu XIX i XX wieku, znacznie zaniża wartości natężeń obecnych deszczów – średnio o 40% we Wrocławiu (na podstawie pomiarów na stacji Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej – Państwowego Instytutu Badawczego (IMGW-PIB) Wrocław-Strachowice z okresu 1960–2009 [10]), o 36% w Warszawie oraz w skali kraju o 33% (według pomiarów na 100 stacjach IMGW-PIB, z okresu 1986–2015 [17]). Z kolei regionalny, probabilistyczny model Bogdanowicz-Stachy z 1998 roku [2] nie ma zastosowania dla częstości występowania $C = 1$ rok, gdzie znacznie zaniża, oraz dla $C \geq 5$ lat, w którym zawyża wyniki obliczeń lokalnych wysokości deszczów maksymalnych. Jest to m.in. skutkiem zastosowania nieodpowiedniej (w przypadku hydrologii miejskiej) metody maksimów rocznych AMS (annual maximum series) wyboru próby losowej deszczów do analiz. Potrzeba zastąpienia formuły Błaszczyka aktualnymi, lokalnymi modelami probabilistycznymi opadów maksymalnych, wskazywana była w wielu pracach na przestrzeni ostatnich dwudziestu lat [2,5,12,11,13,14,24,23,29]. Konieczne staje się też wdro-

żenie do praktyki projektowej rozwiązań przestrzennych i opartych na wiarygodnych danych pomiarowych, jakie można znaleźć w polskim atlasie opadów maksymalnych (PANDa) [16], opracowanego na wzór niemieckiego atlasu KOSTRA z 2010 roku i późniejszych aktualizacji [19] czy interaktywnym atlasie IMGW-PIB PMACTP, opartym na modelach probabilistycznych opadów maksymalnych o określonym czasie trwania i prawdopodobieństwie przewyższenia [21].

Wprowadzenie jednolitego i powszechnie dostępnego systemu prezentacji wyników probabilistycznych analiz maksymalnych deszczów, pochodzących z pomiarów w skali całego kraju, pozwoli m.in. na bezpieczniejsze niż dotychczas projektowanie systemów odwodnieniowych, a także urealnienie ocen zagrożeń wylewami z kanałów czy podtopieniami terenów, co jest postulowane m.in. pracach [5, 7-9, 13, 20, 21, 25, 28, 29]. Pomimo krytycznego stanowiska środowiska naukowego, odnośnie przydatności formuły Błaszczyka do wymiarowania odwodnień terenów, jest on nadal formalnie w użyciu, co skutkuje obserwowanym już obecnie częstym występowaniem wylewów z systemów kanalizacyjnych, np. w Warszawie czy Łodzi. Sytuacja ta ulegnie dalszemu pogorszeniu ze względu na prognozowane skutki zmian klimatu w przyszłości [3, 6, 9, 13, 15, 18, 26, 28, 30]. Norma PN-EN 752:2017 [22] ogranicza częstość występowania tych niekorzystnych zjawisk do rzadkich – „akceptowanych społecznie” powtarzalności.

^{*)} Marcin Wdowikowski, Katarzyna Wartalska, Bartosz Kaźmierczak, Andrzej Kotowski: Politechnika Wrocławska, Wydział Inżynierii Środowiska, Katedra Wodociągów i Kanalizacji, pl. Grunwaldzki 9, 50-384 Wrocław, autor do kontaktu: Marcin Wdowikowski e-mail:marcin.wdowikowski@pwr.edu.pl

Filozofia ta stawia przed projektantami i eksploataciami systemów kanalizacyjnych wyzwanie sprostania tym zaleceniom. W tab. 1 podano przykładowe kryteria projektowe kanalizacji dla zagrożeń wylewaniami wg wymagań najnowszej normy PN-EN 752 z 2017 r.

Tabela 1. Kryteria projektowe kanalizacji ze względu na zagrożenia wylewaniami wg PN-EN752:2017

Table 1. Design criteria for sewers due to spill hazards according to PN-EN752:2017

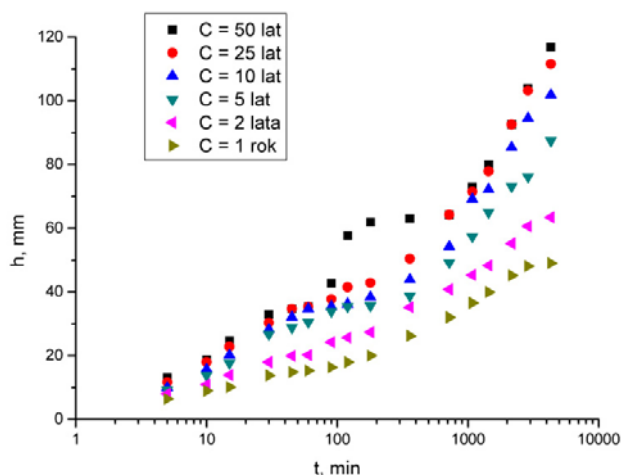
Stopień zagrożenia	Przykładowe lokalizacje	Dopuszczalna częstość wylewów [1 raz na C lat]	Prawdopodobieństwo wystąpienia [-]
Bardzo mały	Drogi lub otwarte przestrzenie z dala od budynków	1	1,0
Mały	Tereny rolnicze (w zależności od użytkowania, np. pastwiska, grunty orne)	2	0,50
Mały do średniego	Otwarte przestrzenie wykorzystywane do celów publicznych	3	0,30
Średni	Drogi lub otwarte przestrzenie w pobliżu budynków	5	0,20
Średni do wysokiego	Zalania zamieszkałych budynków z wyłączeniem piwnic	10	0,10
Wysoki	Zalania zamieszkałych piwnic lub przejazdów pod ulicami	30	0,03
Bardzo wysoki	Infrastruktura krytyczna	50	0,02

Przykładowo, dla infrastruktury krytycznej (podziemne obiekty komunikacyjne, przejścia, przejazdy pod ulicami itp.), dopuszczalna jest częstość wylewów: 1 raz na 50 lat (tab. 1). Fizycznie poprawne przyporządkowanie tak rzadkiej powtarzalności występowania deszczy wymaga próby losowej, pochodzącej z minimum 50 lat jednorodnych pomiarów [7,10,12]. Dlatego tak ważne są systematyczne badania opadów, w tym określanie statystycznej częstości występowania ich maksymalnych wysokości, w celu sprostania wymaganiom wspomnianej normy, co jest przedmiotem badań w prezentowanej pracy.

2. Probabilistyczne modele deszczów maksymalnych dla Wrocławia

W monografii [10] z 2010 r. opracowano dwa modele probabilistyczne na wysokość deszczów maksymalnych dla Wrocławia. Materiałem badawczym były archiwalne pluwiogramy ze stacji IMGW-PIB Wrocław-Strachowice z pięćdziesięciolecia 1960–2009. Do analiz statystycznych selekcjonowano przedziałowe serie intensywnych deszczów PDS (partial duration series) „metodą przewyższeń progowych POT (peak over threshold), według własnego kryterium wysokości „silnych deszczów”: $h \geq 0,75t^{0,5}$ – wzorowanego na podziale opadów Chomicza. Z pluwiogramów wyodrębniono deszcze o ponad progowej wysokości

w następujących 16 przedziałach czasu ich trwania: $t = 5, 10, 15, 30, 45, 60, 90, 120, 180, 360, 720, 1080, 1440, 2160, 2880$ i 4320 minut. Jako kryterium niezależności próby losowej deszczów przyjęto wskaźnik minimalnego czasu trwania okresu bezopadowego MDPD (*minimum dry period duration*) wynoszący 4 godziny. Uszeregowanym nierosnąco przedziałowym wysokościami 514-tu deszczy syntetycznych, przypisano następnie empiryczne prawdopodobieństwo przewyższenia (p) – zamiennie częstość ($C = 1/p$). W tab. 2 podano zestawienie sześciu szeregów czasowych zmierzonych wysokości deszczów dla częstości występowania: $C \in \{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$ lat, które zobrazowano na rys. 1.



Rys. 1. Wizualizacja szeregów czasowych empirycznych wysokości deszczów maksymalnych we Wrocławiu

Fig. 1. Visualisation of maximum rainfall empirical heights time series in Wrocław

W odniesieniu do zmiennych losowych ciągłych (x), najczęściej nie dysponujemy przesłankami teoretycznymi, pozwalającymi na jednoznaczne ustalenie typu rozkładu prawdopodobieństwa, najlepiej dopasowanego do analizowanego zjawiska. Spośród czterech rozkładów (wytypowanych na podstawie literatury) za przydatne do opisu deszczów maksymalnych we Wrocławiu, uznano 2 rozkłady: Weibulla (nazwany także rozkładem Fishera-Tippetta typu III) oraz Gamma (Pearsona typu III), stosując testy zgodności I-Kolmogorova ($\alpha = 0,05$) oraz bayesowskie kryterium informacyjne BIC (Bayesian information criterion) [10].

Pierwszy model probabilistyczny na maksymalną wysokość deszczów we Wrocławiu oparto na rozkładzie Weibulla. Funkcja gęstości, logarytm funkcji wiarygodności oraz kwantyl zmiennej losowej tego rozkładu wyrażane są kolejno wzorami [10, 12]:

$$f(x; \alpha, \lambda, \varepsilon) = \alpha \lambda^\alpha (x - \varepsilon)^{\alpha-1} e^{-\lambda^\alpha (x - \varepsilon)^\alpha} \quad (1)$$

$$\ln L(\alpha, \lambda, \varepsilon) = N \ln \alpha + N \alpha \ln \lambda + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^N \ln(x_i - \varepsilon) - \lambda^\alpha \sum_{i=1}^N (x_i - \varepsilon)^\alpha \quad (2)$$

$$x_p(\alpha, \lambda, \varepsilon) = \varepsilon + \frac{1}{\lambda} (-\ln p)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3)$$

Tabela 2. Szeregi czasowe empirycznych wysokości deszczów maksymalnych we Wrocławiu

Table 2. Time series of maximum rainfall empirical heights in Wrocław

Nr	C	Wysokość opadu h (w mm) w poszczególnych przedziałach czasowych t (w minutach)															
		5	10	15	30	45	60	90	120	180	360	720	1080	1440	2160	2880	4320
1	50	13,1	18,7	24,7	32,9	34,7	35,3	42,7	57,7	61,9	63,1	64,2	72,9	80,1	92,6	103,9	116,9
2	25	11,6	18,0	22,8	30,3	34,7	35,3	37,7	41,5	42,8	50,4	64,2	71,5	77,9	92,5	103,2	111,6
5	10	9,9	15,7	20,1	28,2	32,1	34,7	35,4	36,2	38,4	43,9	54,2	69,1	72,2	85,4	94,5	101,9
10	5	9,3	13,8	17,7	26,7	28,8	30,5	33,9	35,4	35,7	38,7	49,2	57,4	65,0	73,1	76,2	87,5
25	2	8,0	11,0	13,9	17,9	19,9	20,2	24,2	25,6	27,3	35,2	40,8	45,3	48,3	55,2	60,6	63,4
50	1	6,4	8,9	10,1	13,7	14,8	15,3	16,3	17,9	20,0	26,2	32,0	36,5	39,9	45,2	48,1	49,0

α – parametr kształtu, – ,
 λ – parametr skali, – ,
 ε – dolne ograniczenie, mm,
 p – prawdopodobieństwo ($p = 1/C$), – .

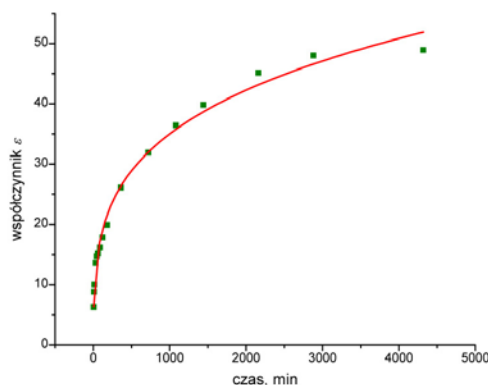
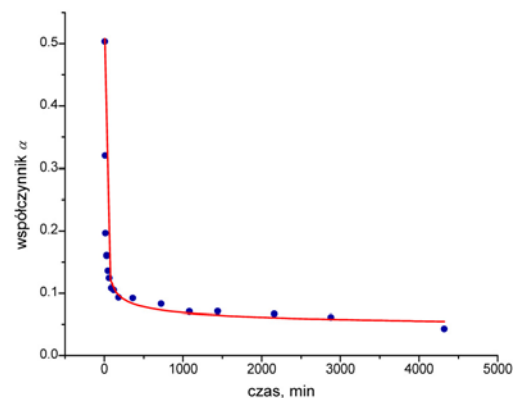
Estymatory parametrów funkcji gęstości (1) wyznaczono metodą największej wiarygodności (MNW), poprzez maksymalizację równania (2). Wyniki obliczeń parametrów rozkładu Weibulla dla czasów trwania $t \in [5; 4320]$ min i największych wysokości deszczów we Wrocławiu z lat 1960–2009, zamieszczono w tab.3.

Tabela 3. Wyniki obliczeń wartości parametrów α , β i ε dla rozkładu Weibulla

Table 3. Weibull distribution parameters computation α , β i ε results

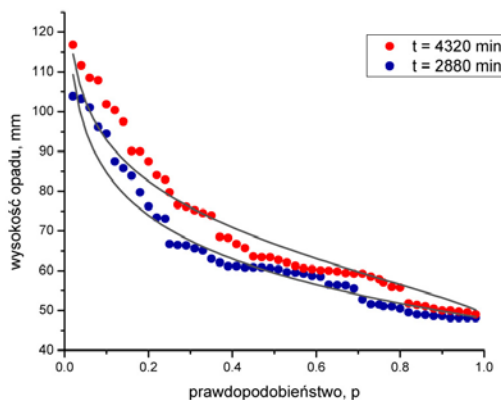
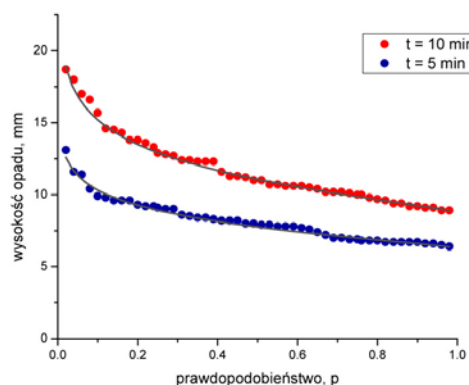
t, min	α	β	ε
5	0,503	1,183	6,3
10	0,321	1,160	8,8
15	0,196	1,341	10,0
30	0,160	1,114	13,6
45	0,136	1,062	14,7
60	0,124	1,043	15,2
90	0,109	1,062	16,2
120	0,105	1,083	17,8
180	0,0934	1,322	19,9
360	0,0923	1,636	26,1
720	0,0829	1,561	31,9
1080	0,0706	1,492	36,4
1440	0,0710	1,240	39,8
2160	0,0669	1,129	45,1
2880	0,0613	1,030	48,0
4320	0,0425	1,329	48,9

Na tej podstawie sporządzono wykresy zależności α i ε od czasu t trwania deszczów, podane na rys. 2, a następnie wyznaczono równania na badane zależności. Z uwagi na brak trendu zależności β od t , do dalszych obliczeń przyjęto średnią wartość $\beta = 1,237$.



Rys. 2. Zależności parametrów rozkładu Weibulla α i ε od czasu trwania opadu t

Fig. 2. Dependence of Weibull distribution parameters α and ε on rainfall duration t



Rys. 3. Przykładowe dystrybucje teoretyczne rozkładu Weibulla na tle dystrybucji empirycznych największych wysokości deszczów z 50-cio letniego okresu obserwacji we Wrocławiu dla wybranych czasów trwania

Fig. 3. Examples of theoretical distributions of the Weibull distribution against the empirical distributions of the highest rainfall amounts from the 50-year observation period in Wrocław for selected durations

Zależność współczynnika α od czasu t trwania opadów opisano (przy $R = 0,993$) funkcją:

$$\alpha = (97,105t^{0,0222} - 98,675)^{-1} \quad (4)$$

a zależność współczynnika ε od t – jako dolnego ograniczenia (przy $R = 0,996$) wzorem:

$$\varepsilon = -4,583 + 7,412t^{0,242} \quad (5)$$

W rezultacie, uszczegółowiona postać kwantyla (3) rozkładu Weibulla ($x_p = h_{max}$) w zakresie czasu trwania deszczów $t \in [5; 4320]$ min i prawdopodobieństwa przewyższenia $p \in [1; 0,01]$ (zamiennie częstości: $C \in [1; 100]$ lat), przyjmuje postać modelu na wysokość deszczów maksymalnych [2, 8, 12]:

$$h_{max}(t, C) = -4,583 + 7,412t^{0,242} + (97,105t^{0,0222} - 98,675) \quad (6)$$

Interpretację graficzną przykładowych dystrybucji empirycznych (z pomiarów) oraz teoretycznych – z rozkładu Weibulla przedstawiono na wykresach na rys. 3.

Odnośnie rozkładu Gamma funkcja gęstości występuje w postaci [10, 12]:

$$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\alpha(x-\varepsilon)} (x-\varepsilon)^{\lambda-1} \quad (7)$$

a logarytm funkcji wiarygodności:

$$\ln L = N \lambda \ln \alpha - N \ln \Gamma(\lambda) - \alpha \sum_{i=1}^N x_i + (\lambda - 1) \sum_{i=1}^N \ln x_i \quad (8)$$

Wykorzystując MNW parametry rozkładu określono z zależności:

$$\ln \lambda - \psi(\lambda) = \ln(x-\varepsilon) - \ln(x-\varepsilon) = A_\lambda \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{(x-\varepsilon)} \quad (10)$$

$$\psi(\lambda) = \frac{d \ln \Gamma(\lambda)}{d \lambda} \quad (11)$$

Kwantyl zmiennej losowej rozkładu Gamma przedstawia wzór:

$$x_p = \varepsilon + \frac{1}{\alpha} t_\gamma \quad (12)$$

gdzie t_γ – wartość kwantyla standardowego rozkładu gamma.

Stosując analogiczną metodykę, uszczegółowiono postać kwantyla (12) do postaci modelu probabilistycznego na maksymalną wysokość deszczów we Wrocławiu, dla zakresu czasu trwania $t \in [5; 4320]$ min i prawdopodobieństwa przewyższenia $p \in [1; 0,01]$ (tj. $C \in [1; 100]$ lat) [10, 8, 13]:

$$h_{\max}(t, p) = -4,583 + 7,412t^{0,242} + 26,011(20,713t^{0,0797} - 22,332)(1 - p^{0,0441}) \quad (13)$$

W pracy [7] z 2015 r., kontynuując rozpoczęte badania we Wrocławiu, dokonano weryfikacji przydatności do opisu maksymalnych wysokości deszczów (z okresu 1960–2009) uogólnionego rozkładu wykładniczego (GED). Kwantyl tego rozkładu przyjmuje dwie postaci – dwuparametrową:

$$h_p = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - (1 - p)^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (14)$$

oraz trójparametrową:

$$h_p = \mu - \frac{1}{\lambda} \ln(1 - (1 - p)^{\frac{1}{\alpha}}) \quad (15)$$

gdzie: λ i α to parametry kształtu i skali, a μ to ograniczenie dolne (parametr położenia).

Opracowany na tej podstawie model probabilistyczny, oparty na kwantylu (15) rozkładu GED, dla czasu trwania $t \in [5; 4320]$ min i prawdopodobieństwa przewyższenia $p \in [1; 100]$ (tj. $C \in [1; 100]$ lat), przyjmuje postać [13, 7]:

$$h_{\max}(t, p) = -4,583 + 7,412t^{0,242} - (186,518t^{0,0106} - 187,968) \ln(1 - (1 - p)^{0,911}) \quad (16)$$

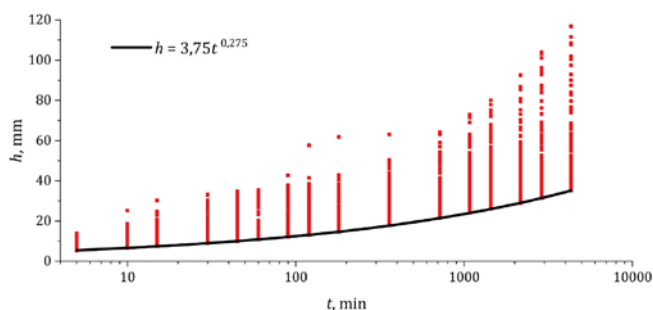
3. Modyfikacje metodyki formułowania modeli probabilistycznych

3.1. Próg odcięcia do ustalania próby losowej deszczów maksymalnych metodą POT

W monografii [9] z 2019 r. zaproponowano i pozytywnie zweryfikowano modyfikację dotychczasowej metodyki formułowania probabilistycznych modeli opadów maksymalnych dla Wrocławia. Celem pracy była prognoza przyszłych wysokości opadów, oparta na zaobserwowanych trendach z okresu pomiarowego 1960–2018 ($N = 59$ lat) na stacji IMGW-PIB Wrocław-Strachowice. Do prognoz wydzielano krocząco 30–to letnie okresy: 1960–1989, 1961–1990, ..., 1989–2018. W ten sposób utworzono 30 ciągów pomiarowych, które stanowiły podstawę do opracowania modeli probabilistycznych na wysokość deszczów maksymalnych z uwzględnieniem trendu zmian klimatu. Próby losowe, w postaci serii przedziałowych wysokości deszczów PDS, ustalano metodą POT – powyżej zmodyfikowanej postaci progu odcięcia, jako:

$$h \geq 3,5t^{0,275} \quad (17)$$

w 16 przedziałach czasu: $t = 5, 10, 15, 30, 45, 60, 90, 120, 180, 360, 720, 1080, 1440, 2160, 2880$ i 4320 min. Na rysunku 4 zobrazowano ponad progowe wartości przedziałowych wysokości deszczów ustalone na podstawie kryterium (17) dla danych z Wrocławia (1960–2018).

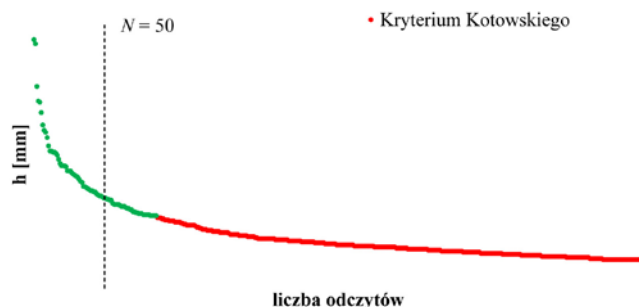


Rys. 4. Ponad progowe deszcze wg kryterium (17) zarejestrowane we Wrocławiu w latach 1960–2018

Fig. 4. Rainfall amounts above criterion (17) threshold recorded in Wrocław from 1960 to 2018

Na rys. 5 zobrazowano natomiast przykładową różnicę w liczbie elementów zbiorów przedziałowych wysokości deszczów o czasie trwania $t = 5$ min, wyselekcjonowanych z $N = 50$ lat obserwacji na stacji IMGW-PIB w Legnicy [8], wg nowego kryterium progu odcięcia (17) oraz wg dotychczas stosowanego kryterium [10]:

$$h \geq 0,75t^{0,5} \quad (18)$$



Rys. 5. Przykładowe porównanie liczby elementów zbioru przedziałowych wysokości deszczów (h) dla $t = 5$ min i $N = 50$ lat wg kryterium Kaźmierczaka (17) i kryterium Kotowskiego (18)

Fig. 5. Example comparison of the partial duration rainfall heights elements (h) for $t = 5$ min and $N = 50$ years according to Kaźmierczak's criterion (17) and Kotowski's criterion (18)

Dla przykładowo wyodrębnianych deszczów o $t = 5$ min z $N = 50$ lat, wg kryterium (18) otrzymano 419 wartości h do analiz częstości występowania. Zastosowanie w tym przypadku kryterium (17) daje 82 wartości h , z których tylko 32 wartości są nie wykorzystywane do analiz częstości deszczów – tworząc tzw. ogon PDS (rys. 5). Kryterium (17) powoduje więc znaczne skrócenie czasu opracowywania pasków pluwiograficznych, ponieważ wiele niezależnych epizodów deszczów może być wyeliminowana już na pierwszym etapie analiz.

Do opisu wysokości deszczów maksymalnych, dla każdego z 30 analizowanych okresów, metodą największej wiarygodności (MNW) wyznaczono estymatory parametrów rozkładów GED i Weibulla. Do sprawdzenia zgodności przyjętych rozkładów teoretycznych z rozkładami empirycznymi zastosowano test λ -Kolmogorowa. Otrzymane wyniki pozwoliły przyjąć hipotezę zerową o zgodności rozkładów teoretycznych GED i Weibulla z danymi empirycznymi. Bayesowskie kryterium informacyjne Schwartz'a (BIC) pozwoliło jednak wskazać na rozkład GED jako lepszy jakościowo do opisu analizowanych danych empirycznych z Wrocławia. Zastosowany test Manna-Kendalla wykazał istotne statystycznie trendy zmian wszystkich parametrów równań opisujących zależność estymatorów parametrów skali i dolnego ograniczenia od czasu trwania opadów. W rezultacie otrzymano równania, które po podstawieniu do kwantyla GED (15) pozwoliły na sformułowanie modelu predykcyjnego na wysokość deszczów maksymalnych, zależnych od: czasu trwania (t), prawdopodobieństwa przekroczenia (p) oraz roku (r), na który liczony jest deszcz:

$$h_{\max}(t, p, r) = \frac{(-40,81 + 2,27 \cdot 10^{-2}r)t^{1,96-8,33 \cdot 10^{-4}r}}{(-3,34+1,83 \cdot 10^{-3}r)(t-66,42+3,09 \cdot 10^{-2}r)^{-0,25}} \ln(1 - (1 - p)^{1/0,737}) \quad (19)$$

Wzór (19) ma praktyczne zastosowanie dla $t \in [5; 4320]$ min, $p \in [0,02; 1]$ (zamiennie $C \in [50; 1]$ rok) oraz lat od $r = 2018$ do $r = 2050$. Przykładowo, prognozowane na 2050 rok wysokości deszczów o czasie trwania $t = 5$ min (wg tab. 5) zostały wykorzystane w pracy [27] do tworzenia wzorców Eulera typu II do modelowania niezawodności działania kanalizacji deszczowej we Wrocławiu.

Tab. 4. Wysokości deszczów maksymalnych (h_{\max} w mm) dla $t = 5$ min prognozowane wg (19) na 2018 i 2050 rok

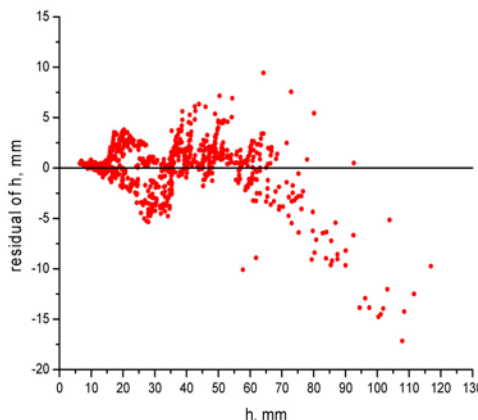
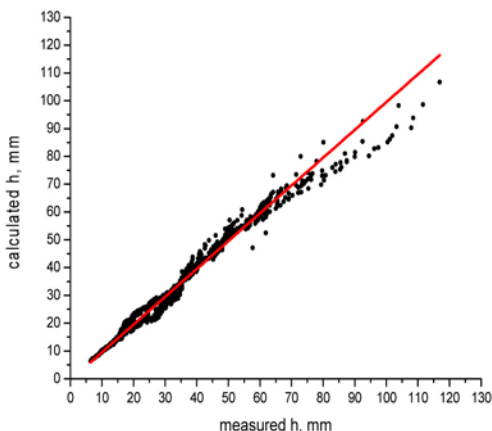
Tab. 4. Maximum rainfall heights (h_{\max} w mm) for duration $t = 5$ min predicted with formula (19) for year 2018 and 2050

r [lata]	Wysokości deszczów maksymalnych dla $t = 5$ min i C [lata]					
	C = 1	C = 2	C = 5	C = 10	C = 30	C = 50
2018	7,8	9,2	11,5	13,4	16,4	17,8
2050	8,6	10,0	12,4	14,3	17,4	18,8

3.2. Zakres analiz i rozkładów prawdopodobieństwa do opisu deszczów maksymalnych

W pracy [28] z 2020 r. ujednolicono i pozytywnie zweryfikowano uogólnioną metodykę formułowania probabilistycznych modeli deszczów maksymalnych, na przykładzie dorzecza Górnej i Środkowej Odry, jako regionu Polski szczególnie narażonego na skutki powodzi rzecznych i wylewy z kanalizacji. Materiał badawczy pochodził z 8 stacji IMGW-PIB, z okresu pięciu pełnych dziesięcioleci 1961–2010 ($N = 50$ lat). Cztery wybrane stacje położone są na terenach nizinnych: Legnica, Opole, Wrocław, Zielona Góra oraz cztery stacje położone są na terenach podgórskich: Jelenia Góra, Kłodzko, Racibórz, Zgorzelec. Badania prowadzono wg następujących kroków – etapów proponowanej metodyki:

1. Dla każdej stacji selekcjonowano metodą POT intensywne deszcze, spełniające kryterium Kaźmierczaka (17) odnośnie ponad progowych wysokości deszczów, w 17 przedziałach czasów trwania: $t = 5, 10, 20, 30, 40$ i 50 min, i 1, 1,5, 2, 3, 6, 12 i 18 godz., oraz 1, 1,5, 2, 3 dni (dostosowanych do standardowych zestawień IMGW-PIB). Wybrane wartości spełniały warunki wzajemnej niezależności (MDPD = 4 godz.).
2. Otrzymane ciągi przedziałowych wysokości układano w nierosnące szeregi rozdzielcze, stanowiące zmienną losową i dystrybuantę empiryczną o przypisanym prawdopodobieństwie przewyższenia.



Rys. 6. Dopasowanie wyników pomiarów i obliczeń (po lewej) oraz rozkładu reszt cząstkowych (po prawej) dla modelu (6) opartego na rozkładzie Weibulla

Fig. 6. Fitting between calculated model results and measurements (left) and distribution of partial residuals (right) for the model (6) based on the Weibull distribution

3. Dla ośmiu proponowanych rozkładów prawdopodobieństwa: Logarytmiczno-Logistyczny, Logarytmiczno-Normalny, Gamma, Frechet, Weibull, uogólniony Pareto, uogólniony wartości ekstremalnych (GEV) oraz uogólniony wykładniczy (GED), metodą największej wiarygodności (MNW) dokonano estymacji parametrów: kształtu (α), skali (β) i położenia (γ).
4. Ocenę jakości dopasowania dystrybuant teoretycznych i empirycznych wykonano w oparciu o testy statystyczne: λ -Kolmogorova i Andersona–Darlinga (na poziomie istotności $\alpha = 0,05$), kryteria informacyjne: AIC , BIC i $HQIC$ (maksimum wartości) oraz kryteria błędów: $MAPE$ i $rRMSE$ (minimum wartości).
4. Po wielokryterialnym wyborze najlepszych, teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa (którymi dla dorzeczu Górnej i Środkowej Odry okazały się: GED, Weibull i Gamma), wykonano optymalizację wartości ich parametrów, wyznaczając nowe estymatory: kształtu $\hat{\alpha}$ jako średnie arytmetyczne oraz skali $\hat{\beta}$ i położenia $\hat{\gamma}$ jako funkcje $\hat{\beta} = \beta(t)$ i $\hat{\gamma} = \gamma(t)$.
5. Na końcowym etapie proponowanej procedury dokonano oceny ilościowej wyników modelowania, porównując teoretyczne wysokości deszczów maksymalnych z wartościami uzyskanymi z pomiarów. Sformułowane modele probabilistyczne dla ośmiu badanych stacji IMGW-PIB, mają zróżnicowaną jakość dopasowania prognozowanych wysokości deszczów, względem zmierzonych – dla różnych czasów trwania. Na ogół modele oparte na rozkładzie GED lepiej opisują deszcze krótkotrwałe, a oparte na rozkładzie Weibulla – deszcze o dłuższych czasach trwania. W przypadku stacji IMGW-PIB we Wrocławiu potwierdzono dokładność opisu wysokości deszczów maksymalnych według modeli (6) i (16), tj. z rozkładami Weibulla i GED.

4. Ocena ilościowa probabilistycznych modeli deszczów dla Wrocławia

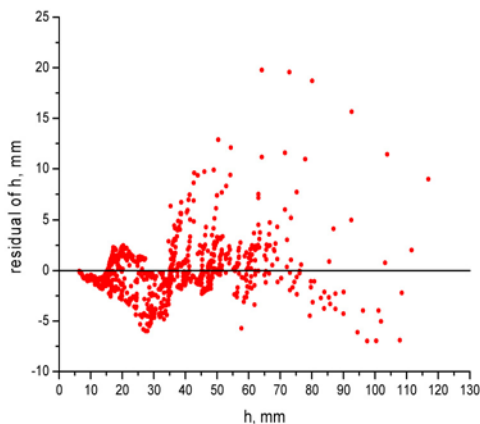
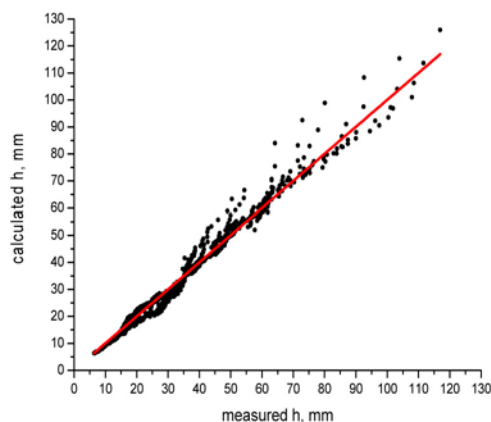
W celu oceny ilościowej opracowanych dla Wrocławia modeli probabilistycznych dokonano analizy ich dokładności. Do porównywania wyników pomiarów i obliczeń wysokości deszczów wykorzystano względny średniokwadratowy błąd resztkowy ($rRMSE$):

$$rRMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{h_{o,i} - h_{p,i}}{h_{p,i}} \right)^2} \cdot 100\% \quad (20)$$

gdzie:

- h_o – wysokość deszczu z obliczeń, mm,
- h_p – wysokość deszczu z pomiaru, mm,
- N – liczba porównywanych par danych, –.

W przypadku modelu (6) (opartego na rozkładzie Weibulla), wartość błędu $rRMSE$ wg (20) wynosi 7,10%. Na rysunku 6 przedstawiono na wykresach interpretację graficzną dopasowania wyników pomiarów i obliczeń oraz rozkładu reszt cząstkowych tego modelu.



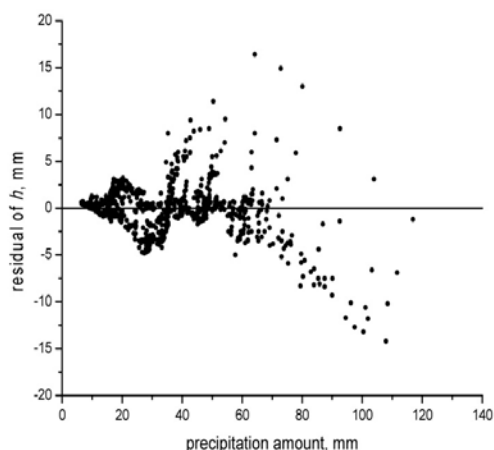
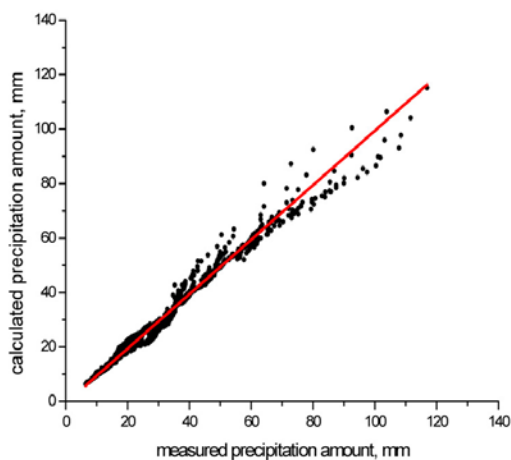
Rys. 7. Wykresy dopasowania wyników pomiarów i obliczeń (po lewej) oraz rozkładu reszt cząstkowych (po prawej) dla modelu (13) opartego na rozkładzie Gamma

Fig. 7. Fitting between calculated model results and measurements (left) and distribution of partial residuals (right) for the model (13) based on the Gamma distribution

Z rys. 6 wynika, że model (6) dobrze opisuje badane deszcze, nieznacznie zawyżając ekstremalnie wysokie deszcze, od $h_{max} > 90$ mm (wykres po lewej).

W przypadku modelu (13) (opartego na rozkładzie Gamma) wartość błędu $rRMSE$ wynosi już 7,99%. Na rysunku 7 przedstawiono interpretację graficzną dopasowania wyników pomiarów i obliczeń oraz rozkład reszt cząstkowych dla modelu (13). Z wykresów (rys. 7) wynika, że model (13) zaniża na ogół obliczane wysokości deszczów, od $h_{max} > 40$ mm, względem zmierzonych we Wrocławiu.

W przypadku modelu (16) (opartego na GED), dopasowanie wyników pomiarów i obliczeń oraz rozkład reszt cząstkowych przedstawiono na rys. 8. Wartość błędu wg (20) jest najmniejsza: $rRMSE = 7,09\%$, a rozrzut wartości reszt cząstkowych jest najbardziej symetryczny –



Rys. 8. Wykresy dopasowania wyników pomiarów i obliczeń (po lewej) oraz rozkładu reszt cząstkowych (po prawej) dla modelu (16) opartego na rozkładzie GED

Fig. 8. Fitting between calculated model results and measurements (left) and distribution of partial residuals (right) for the model (16) based on the GED distribution

względem poziomej linii o wartości „0” (wykres po prawej), w porównaniu z modelami (6) i (13).

Próbie opracowania aktualnego modelu deszczów maksymalnych do projektowania odwodnień terenów w skali kraju podjęto na Uniwersytecie Warszawskim w 1998 roku. Bogdanowicz i Stachy, na podstawie ogólnopolskich pomiarów deszczy na 20 stacjach meteorologicznych IMGW-PIB z okresu 1960–1990 ($N = 31$ lat), opublikowali tzw. „charakterystyki projektowe” deszczów, w postaci modelu probabilistycznego [2]:

$$h_{max}(t, \alpha, p) = 1,42t^{0,33} + \alpha(R, t) \cdot (-\ln p)^{0,584} \quad (21)$$

gdzie:

h_{max} – maksymalna wysokość deszczu, mm,

t – czas trwania deszczu, min,

p – prawdopodobieństwo przewyższenia: $p \in (0; 1]$,

α – parametr skali, zależny od regionu Polski i czasu t .

Do opracowania modelu (21) przyjęto za podstawę 31 deszczów maksymalnych, po jednym największym z każdego roku obserwacji (1960–1990), dla każdej z 20 stacji meteorologicznych metodą AMS. Opady szeregowano wg nierosnących, przedziałowych wysokości w 14 interwałach czasowych: od 5 min do 72 godz.

W tab. 5 przedstawiono zbiorcze porównanie wyników pomiarów deszczów we Wrocławiu z wynikami obliczeń jednostkowych natężeń deszczów maksymalnych (q_{max} – w $dm^3 \cdot s^{-1} \cdot ha^{-1}$) z trzech modeli probabilistycznych (6), (13) i (16) (przekształconych na $q_{max}(t, C)$), na tle wyników obliczeń z modelu probabilistycznego Bogdanowicz-Stachy (z okresu 1960–1990) dla regionów czasowych trwania deszczów właściwych dla Wrocławia (R_1 i R_3) wg [2], dla wybranych czasów trwania i częstości występowania deszczów maksymalnych.

Na podstawie analizy wyników obliczeń porównawczych (tab. 5) można sformułować następujące wnioski:

1. Dla prawdopodobieństwa $p = 0,98$, tj. dla częstości $C = 1$ rok, wyniki obliczeń $q_{max}(t, C)$ z przekształconych modeli probabilistycznych (6), (13) i (16) są identyczne – co wynika z przyjętej funkcji (5) opisującej dolne ograniczenie, i są zgodne z wynikami pomiarów we Wrocławiu. Przykładowo, dla $t = 15$ min natężenie jednostkowe deszczu wynosi $q_{15,1} = 107,7 dm^3 \cdot s^{-1} \cdot ha^{-1}$, a z pomiarów $q_{15,1} = 112,2 dm^3 \cdot s^{-1} \cdot ha^{-1}$. Błąd względny jest na poziomie -4% . Na tym tle rażąco odstają wyniki obliczeń z probabilistycznego modelu Bogdanowicz-Stachy (21): $q_{15,1} = 38,6 dm^3 \cdot s^{-1} \cdot ha^{-1}$. Model ten nie może więc mieć zastosowania dla $C = 1$ rok. Przyczyną tego stanu rzeczy jest nieodpowiednia metoda maksimum rocznych (AMS) zastosowana do wyboru próby losowej deszczów do analiz statystycznych częstości ich występowania, co wykazano m.in. w pracy [10].
2. Dla prawdopodobieństw $p < 0,98$, tj. dla częstości $C > 1$ rok, wyniki pomiarów we Wrocławiu najdokładniej opisuje model (6), a następnie model (16). Model (13) natomiast pośredkuje wyniki obliczeń pomiędzy (6) i (16) – i na ogół zaniża wartości q_{max} dla deszczów krótkotrwałych i nieznacznie zawyża dla długotrwałych. Na tym tle

Tabela 5. Porównanie wyników obliczeń natężeń jednostkowych deszczów maksymalnych obliczonych z modeli probabilistycznych z danymi pomiarowymi z Wrocławia
 Table 5. Comparison of the maximum rainfall intensities calculated from probabilistic models with measured data from Wrocław

p [-] C [rok]	t [min]	Jednostkowe natężenie deszczów q_{max} [dm ³ ·s ⁻¹ ·ha ⁻¹]				
		Pomiar	Model (6) Weibull	Model (13) Gamma	Model (16) GED	Model (21) Weibull
$p = 0,98; C = 1$ rok	5	213,3	212,0	212,0	212,0	80,5
	10	148,3	139,3	139,3	139,3	50,6
	15	112,2	107,7	107,7	107,7	38,6
	30	76,1	68,3	68,3	68,3	24,2
	45	54,8	52,0	52,0	52,0	18,5
	90	30,2	32,3	32,3	32,3	11,6
	180	18,5	19,9	19,9	19,9	7,3
	360	12,1	12,1	12,1	12,1	4,6
	720	7,4	7,4	7,4	7,4	2,9
1440	4,6	4,5	4,5	4,5	1,8	
$p = 0,50; C = 2$ lata	5	266,7	260,6	243,7	255,2	273,2
	10	183,3	182,9	172,6	178,6	185,2
	15	154,4	144,4	137,0	140,8	144,1
	30	99,4	93,3	89,3	90,9	90,9
	45	73,7	71,2	68,6	69,4	68,5
	90	44,8	44,2	42,9	43,0	41,4
	180	25,3	27,0	26,4	26,2	23,9
	360	16,3	16,3	16,0	15,8	13,5
	720	9,4	9,7	9,7	9,5	7,6
1440	5,6	5,8	5,8	5,6	4,8	
$p = 0,20; C = 5$ lat	5	310,0	308,1	284,2	308,5	395,6
	10	230,0	225,6	215,1	227,0	270,8
	15	196,7	180,3	174,4	181,7	211,1
	30	148,3	117,7	116,1	118,6	133,3
	45	106,7	90,1	89,8	90,8	100,2
	90	62,8	55,8	56,4	56,2	60,3
	180	33,1	33,9	34,7	34,1	34,4
	360	17,9	20,3	21,0	20,4	19,1
	720	11,4	12,0	12,6	12,1	10,6
1440	7,5	7,1	7,5	7,1	6,7	
$p = 0,10; C = 10$ lat	5	330,0	340,4	313,7	348,2	468,9
	10	261,7	254,6	246,2	263,2	322,0
	15	223,3	204,7	201,7	212,2	251,3
	30	156,7	134,3	135,7	139,4	158,7
	45	118,9	102,8	105,2	106,7	119,3
	90	65,6	63,7	66,3	66,0	71,6
	180	35,6	38,6	40,8	39,9	40,7
	360	20,3	23,0	24,7	23,8	22,5
	720	12,5	13,6	14,7	14,0	12,4
1440	8,4	8,0	8,7	8,2	7,8	
$p = 0,04; C = 25$ lat	5	386,7	380,4	351,5	406,7	552,9
	10	300,0	290,5	285,8	313,4	380,6
	15	253,3	234,9	236,6	254,5	297,2
	30	168,3	154,8	160,7	167,8	187,7
	45	128,5	118,7	125,0	128,5	141,0
	90	69,8	73,4	78,9	79,3	84,6
	180	39,6	44,4	48,6	47,8	48,0
	360	23,3	26,4	29,3	28,3	26,3
	720	14,9	15,5	17,5	16,6	14,5
1440	9,0	9,1	10,3	9,6	9,1	
$p = 0,02; C = 50$ lat	5	436,7	409,1	379,0	446,7	609,8
	10	311,7	316,3	314,7	350,1	420,4
	15	274,4	256,6	262,0	284,5	328,4
	30	182,8	169,6	178,9	188,4	207,4
	45	128,5	130,1	139,4	144,5	155,8
	90	79,1	80,5	88,1	89,1	93,4
	180	57,3	48,6	54,2	53,6	52,9
	360	29,2	28,9	32,7	31,7	29,0
	720	14,9	16,9	19,5	18,5	15,9
1440	9,3	9,8	11,4	10,7	10,0	

model Bogdanowicz-Stachý (21) zawyża wyniki obliczeń natężeń jednostkowych (q_{max}) zwłaszcza dla $p \leq 0,2$ ($C \geq 5$ lat), względem zmierzonych we Wrocławiu.

5. Podsumowanie i wnioski końcowe

Dotychczas stosowana do wymiarowania systemów odwodnień terenów zurbanizowanych formuła Błaszczyka z 1954 roku, oparta na pomiarach deszczów z przełomu XIX i XX wieku, znaczne zaniża wysokości obecnych deszczów, co skutkuje m.in. częstym występowaniem wylewów z systemów kanalizacyjnych w Polsce. Potrzeba jej zastąpienia aktualnymi modelami probabilistycznymi deszczów maksymalnych postulowana była w wielu pracach na przestrzeni ostatniego dwudziestolecia. Opracowany w 1998 r. regionalny, probabilistyczny model Bogdanowicz-Stachý nie ma jednak zastosowania w hydrologii miejskiej dla częstości $C = 1$ rok, gdzie znacznie zaniża, oraz dla $C \geq 5$ lat, gdzie zawyża wyniki obliczeń wysokości deszczów. Jest to skutkiem zastosowania metody (AMS) wyboru próby losowej deszczów. Wynika stąd potrzeba formułowania lokalnych, probabilistycznych modeli deszczów maksymalnych, opracowywanych wg jednolitych zasad.

Zasady tworzenia probabilistycznych modeli na wysokość deszczów maksymalnych opracowane na Wydziale Inżynierii Środowiska Politechniki Wrocławskiej w latach 2010–2015 [10, 12, 21], po modyfikacjach zaproponowanych w 2019 r. [9] oraz w 2020 r. [28], mogą mieć charakter uniwersalny. Zostały bowiem pozytywnie zweryfikowane na 4 stacjach nizinnych i 4 stacjach podgórskich, zlokalizowanych w dorzeczu Górnej i Środkowej Odry. Proponowany pięćdziesięcioletni okres pomiarowy deszczów jest odpowiedni do wyodrębnienia metodą przewyższeń progowych (POT) niezbędnej liczby epizodów, stanowiących niezależną próbę losową, do wiarygodnej oceny wysokości deszczów o częstości występowania od $C = 1$ rok do $C = 50$ lat. Do opisu lokalnych wysokości deszczów maksymalnych, z pośród ośmiu proponowanych do zastosowania teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa, należy przeanalizować w pierwszej kolejności przydatność rozkładów Weibulla i GED. Ujednolicone zasady formułowania modeli opadów umożliwią poprawne fizykalnie wzajemne porównywanie wyników obliczeń obecnych, lokalnych wysokości deszczów maksymalnych w Polsce i dają podstawę do szacowania trendów zmian w przyszłości.

Wnikliwa analiza przedziałowych wysokości opadów maksymalnych w długiej serii czasowej epizodów opadów jak w przypadku prac [10], gdzie przeanalizowano 50 lat obserwacji pluwiograficznych, czy prace [8, 9, 25, 28], gdzie przeanalizowano 60 lat danych opadów, umożliwią doprecyzowanie narzędzi statystycznych, niezbędnych do opracowania probabilistycznych modeli opadów.

Tego typu modele uwzględniające przedziałową wysokość deszczów maksymalnych o określonym czasie trwania i prawdopodobieństwie przewyższenia, zalecane są obecnie do projektowania systemów odwodnieniowych, jak i ochrony przeciwpowodziowej terenów zurbanizowanych, w tym do modelowania niezawodności działania kanalizacji deszczowej, dla przyszłych scenariuszy obciążenia zlewni opadami (zmiany klimatu), poprzez weryfikację częstości nadpiętnień i wylewów z kanałów. Modelowanie statystyczne opadów przeprowadzone według zasad opisanych w niniejszej pracy, znalazło zastosowanie w opracowaniu ogólnodostępnego atlasu opadów maksymalnych PMA-XTP IMGW-PIB (<https://klimat.imgw.pl/opady-maksymalne>) [21]. Modele probabilistyczne dostępne w atlasie pozwolą na bezpieczniejsze projektowanie i eksploatację sieci kanalizacyjnych wraz z obiektami służącymi odwodnieniom terenów zurbanizowanych. ■

LITERATURA

- [1] Błaszczyk Waclaw. 1954. „Splywy deszczowe w sieci kanalizacyjnej (Wytyczne do normatywu)”. *Gaz Woda i Technika Sanitarna* 9: 262–271.
- [2] Bogdanowicz Ewa, Juliusz Stachý. 1998. „Maksymalne opady deszczu w Polsce. Charakterystyki projektowe”. *Wydawnictwo Instytutu Meteorologii i Gospodarki Wodnej. Seria Hydrologia i Oceanologia* nr 23: 85.
- [3] De Toffol Sara, Abdul Nasir Laghari, Wolfgang Rauch. 2009. „Are extreme rainfall intensities more frequent? Analysis of trends in rainfall patterns relevant to urban drainage systems”. *Water Science and Technology* 59 (9): 1769–1776.
- [4] Kaźmierczak Bartosz, Andrzej Kotowski. 2012. „Depth-duration-frequency rainfall model for dimensioning and modelling of Wrocław drainage systems”. *Environment Protection Engineering* 38 (4): 127–138.
- [5] Kaźmierczak Bartosz, Andrzej Kotowski. 2012. „Weryfikacja przepustowości kanalizacji deszczowej w modelowaniu hydrodynamicznym”. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*: 144.
- [6] Kaźmierczak Bartosz, Andrzej Kotowski. 2014. „The influence of precipitation intensity growth on the urban drainage systems designing”. *Theoretical and Applied Climatology* 118 (1): 285–296.
- [7] Kaźmierczak Bartosz, Andrzej Kotowski. 2015. „The suitability assessment of a generalized exponential distribution for the description of maximum precipitation amounts”. *Journal of Hydrology* 525: 345–351.
- [8] Kaźmierczak Bartosz, Marcin Wdowikowski. 2016. „Maximum rainfall model based on archival pluviographic records – case study for Legnica (Poland)”. *Periodica Polytechnica. Civil Engineering* 60 (2): 305–312.
- [9] Kaźmierczak Bartosz. 2019. „Prognozy zmian maksymalnych wysokości opadów deszczowych we Wrocławiu”. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*: 138.
- [10] Kotowski Andrzej, Bartosz Kaźmierczak, Andrzej Danczewicz. 2010. „Modelowanie opadów do wymiarowania kanalizacji”. *Wydawnictwo Polskiej Akademii Nauk. Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej. Instytut Podstawowych Problemów Techniki. Studia z zakresu inżynierii nr 68*: 170.
- [11] Kotowski Andrzej, Bartosz Kaźmierczak. 2009. „Ocena przydatności dotychczasowych wzorów na natężenie opadów deszczowych do projektowania odwodnień terenów w Polsce”. *Gaz Woda i Technika Sanitarna* 11: 11–1
- [12] Kotowski Andrzej, Bartosz Kaźmierczak. 2013. „Probabilistic models of maximum precipitation for designing sewerage”. *Journal of Hydrometeorology* 14: 1958–1965.
- [13] Kotowski Andrzej. 2015. „Podstawy bezpiecznego wymiarowania odwodnień terenów”. *Wydawnictwo Seidel-Przywecki*: 288.
- [14] Kupczyk Elżbieta, Rom[an Suligowski. 1997. „Statystyczny opis struktury czasowej opadów atmosferycznych jako elementu wejścia do modeli hydrologicznych”. *Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego*: 116.
- [15] Leonard Michael, Andrew Metcalf, Martin Lambert. 2008. „Frequency analysis of rainfall and streamflow extremes accounting for seasonal and climatic partitions”. *Journal of Hydrology* 348 (1–2): 135–147.
- [16] Licznar Paweł, Janusz Zieliński [red.]. 2020. „Metodyka opracowania Polskiego Atlasu Natężeń Deszczów (PANDA)”. *Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej – Państwowy Instytut Badawczy*: 139.
- [17] Licznar Paweł, Katarzyna Siekanowicz-Grochowina, Michał Oktawiec, Andrzej Kotowski, Ewa Burszta-Adamiak. 2018. „Empiryczna weryfikacja formuły Błaszczyka do obliczania wartości natężenia deszczu miarodajnego”. *Ochrona Środowiska* 40 (2): 17–22.
- [18] Liuzzo Lorena, Gabriele Freni. 2015. „Analysis of Extreme Rainfall Trends in Sicily for the Evaluation of Depth-Duration-Frequency Curves in Climate Change Scenarios”. *Journal of Hydrologic Engineering* 20 (12): 04015036.
- [19] Malitz Gabriele, Heinz Ertel. 2015. „Starkniederschlagshöhen für Deutschland (Bezugszeitraum 1951 bis 2010). KOSTRA-DWD-2010”. *Deutscher Wetterdienst*: 40.
- [20] Nowakowska Monika, Andrzej Kotowski. 2017. „Metodyka i zasady modelowania odwodnień terenów zurbanizowanych”. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*: 120.
- [21] Ozga-Zieliński Bogdan [red.]. 2022. „Modele probabilistyczne opadów maksymalnych o określonym czasie trwania i prawdopodobieństwie przewyższenia – projekt PMA-XTP”. *Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej – Państwowy Instytut Badawczy*: 55.
- [22] PN-EN 752:2017: Drain and sewer systems outside buildings – Sewer system management. *Comite Europeen de Normalisation*: 90.
- [23] Suligowski Roman. 2013. „Maksymalny wiarygodny opad na Wyzynie Kieleckiej”. *Wydawnictwo. Uniwersytetu Jana Kochanowskiego*: 230.
- [24] Suligowski Ziemowit. 2004. „Zagospodarowanie wód opadów. Szczególne problemy”. *Forum Eksploataora* 3–4: 24–27.
- [25] Wartalska Katarzyna, Andrzej Kotowski. 2020. „Metodyka tworzenia wzorców opadów do modelowania odwodnień terenów”. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej*: 154.
- [26] Wartalska Katarzyna, Andrzej Kotowski. 2020. „Model hyetographs of short-term rainfall for Wrocław in the perspective of 2050”. *Atmosphere* 11 (6) 663: 1–13.
- [27] Wdowikowski Marcin, Bartosz Kaźmierczak, Katarzyna Wartalska. 2018. „Probabilistic approach in the heavy rainfall modelling – is model verification needed?” *ITM Web of Conferences* 23 (36): 9.
- [28] Wdowikowski Marcin. 2020. „Opracowanie probabilistycznych modeli opadów maksymalnych dla dorzecza Górnej i Środkowej Odry”. *Rozprawa doktorska. Politechnika Wroclawska*: 287.
- [29] Węglarczyk Stanisław. 2013. „O poprawności wzorów Błaszczyka na obliczanie opadów miarodajnych”. *Infrastruktura i Ekologia Terenów Wiejskich* 3: 63–76.
- [30] Willems Patrick, Karsten Arnbjerg-Nielsen, Jonas Olsson, Van-Thanh-Van Nguyen. 2012. „Climate change impact assessment on urban rainfall extremes and urban drainage: Methods and shortcomings”. *Atmospheric Research* 103: 106–118.