

Analiza porównawcza wybranych metod symulacji nieustalonego przepływu gazu w gazociągu

Comparative analysis of selected methods for simulation of transient gas flow in a gas pipeline

Andrzej J. Osiadacz^{*)}

Słowa kluczowe: sieci gazowe, stany nieustalone, symulacja stanów nieustalonych, metody numeryczne.

Streszczenie

Celem niniejszego artykułu jest porównanie wykorzystując prosty gazociąg dwóch różnych metod (metody charakterystyk oraz metody prostych) do symulacji nieustalonego przepływu gazu w sieciach gazowych. Założono, że nieustalony przepływ jest opisany przez układ równań quasi-liniowych hiperbolicznych. Rezultaty badań wykazały, że metoda prostych jest zdecydowanie bardziej przydatna do symulacji stanów nieustalonych.

Keywords: gas networks, unsteady-state, transient simulation, numerical methods.

Abstract

The purpose of this paper is to compare using simple gas pipeline two different numerical methods (the method of characteristics and the method of lines) which can be used for transient simulation of gas transmission networks. It was assumed that flow through the pipe is described by set of quasi-linear hyperbolic partial differential equations. The results of investigations have shown that the method of lines is much more efficient for this purpose.

1. Wstęp

Głównym celem stosowania programów symulacyjnych jest badanie zachowania się sieci gazowych w określonych warunkach w oparciu o modele matematyczne elementów sieci. W zależności od stosowanego modelu przepływu gazu, symulację dzielimy na statyczną i dynamiczną. Symulacja dynamiczna dotyczy przypadku, gdy parametry przepływu są funkcją czasu. Stan nieustalony w gazociągu, może być wywołany takimi czynnikami jak: zmienne w czasie dostawy lub pobory gazu, włączenie lub wyłączenie dodatkowej sprężarki lub tłoczni, nagła zmiana wypływu gazu w systemie. Do opisu stanów nieustalonych używa się modeli parabolicznych i hiperbolicznych. Te ostatnie uwzględniające zarówno zjawisko bezwładności przepływającego gazu jak również ciśnienie dynamiczne są znacznie dokładniejsze w sensie opisu zjawiska. Stosowane są one w przypadku tzw. szybkich zmian przepływu gazu.

2. Równania opisujące zjawisko nieustalonego przepływu gazu w rurociągu poziomym

2.1. Równanie ciągłości

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.1)$$

gdzie:

ρ^* - gęstość gazu,

A - pole przekroju poprzecznego rury,

M - przepływ masowy.

Przyjęcie przepływu gazu jako procesu izotermicznego daje równanie stanu w postaci:

$$pc^2 = p \quad (2.2)$$

gdzie:

c - prędkość dźwięku w gazie,

p - ciśnienie gazu.

Wstawiając równanie (2.2) do równania (2.1) otrzymujemy:

$$\frac{A}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (2.3)$$

2.2. Równanie zachowania momentu

Ogólna postać równania momentu dla przepływu jednowymiarowego dana jest w postaci:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho w^2}{2} \left(\frac{4f}{D} \right) - g \rho \sin \alpha = \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w^2) \quad (2.4)$$

gdzie:

w - prędkość przepływu gazu,

α - kąt odchylenia przewodu od poziomu,

f - współczynnik oporu hydraulicznego Feninga,

g - przyspieszenie ziemskie,

D - wewnętrzna średnica rury.

Ponieważ składnik $\frac{\partial}{\partial x} (\rho w^2)$ można pominąć bez szkody dla dokładności opisu oraz że $\alpha = 0$ (przewody gazociągu ułożone są poziomo),

^{*)} Andrzej J. Osiadacz, prof. dr hab. inż., Wydział Instalacji Budowlanych, Hydrotechniki i Inżynierii Środowiska, Politechnika Warszawska

otrzymujemy uproszczoną postać równania (2.4). Dołączając do tego równania prawo ciągłości w postaci (2.3) otrzymujemy układ równań różniczkowych typu hiperbolicznego opisujących nieustalony przepływ gazu w rurociągu postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{\partial M}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) - \frac{\partial w^2}{2} \left(\frac{4f}{D} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Jeśli uwzględnimy, że $M = \rho_N w$ w $A = \rho_N Q_N$ oraz $p=c^2$ otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} &= -\frac{c^2 \rho_N}{A} \frac{\partial Q_N}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\rho_N}{A} \frac{\partial Q_N}{\partial t} - \frac{2f \rho^2 c^2 Q_N^2}{DA^2 p} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Powyższy układ równań rozwiązywać będziemy za pomocą metody charakterystyk i metody prostych.

3. Zastosowanie metody charakterystyk do symulacji nieustalonego przepływu gazu

Równania (2.6) można zapisać w następującej formie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial Q_N}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q_N}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha_3 \frac{|Q_N| Q_N}{p} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

gdzie: $\alpha_1 = \frac{\rho_N c^2}{A}$, $\alpha_2 = \frac{A}{\rho_N}$, $\alpha_3 = \frac{2f \rho_N c}{AD}$,

a odpowiadające im równania charakterystyk przyjmują postać:

$$dx - c dt = 0 \quad (3.2)$$

$$-\alpha_2 dp - \alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{c} dQ_N - \alpha_3 \frac{Q_N |Q_N|}{p} dx = 0 \text{ wzdłuż } c+ \quad (3.3)$$

$$dx + c dt = 0 \quad (3.4)$$

$$-\alpha_2 dp + \alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{c} dQ_N - \alpha_3 \frac{Q_N |Q_N|}{p} dx = 0 \text{ wzdłuż } c- \quad (3.5)$$

gdzie: c - prędkość dźwięku w gazie.

Powyższe równania tworzą siatkę charakterystyk w przedziałach:

$$t \in [0, t_{\max}], \quad x \in [0, L]$$

Jeśli wybraliśmy aproksymację liniową, to nachylenie prostych aproksymujących krzywe charakterystyczne musi spełniać warunek:

$$\pm c \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.6)$$

Równania "dopasowania", którymi są równania (3.3), (3.5) możemy przekształcić do postaci:

$$dp + \frac{\rho_N c}{A} dQ_N + \frac{2f}{D} \left[\frac{\rho_N c}{A} \right]^2 \frac{Q_N |Q_N|}{p} dx = 0 \quad (3.7)$$

$$dp - \frac{\rho_N c}{A} dQ_N + \frac{2f}{D} \left[\frac{\rho_N c}{A} \right]^2 \frac{Q_N |Q_N|}{p} dx = 0 \quad (3.8)$$

Dwa powyższe równania są podstawowymi równaniami w dynamicznej symulacji sieci gazowej metodą charakterystyk.

Równania (3.7) i (3.8) po zastosowaniu aproksymacji liniowej można zapisać w postaci:

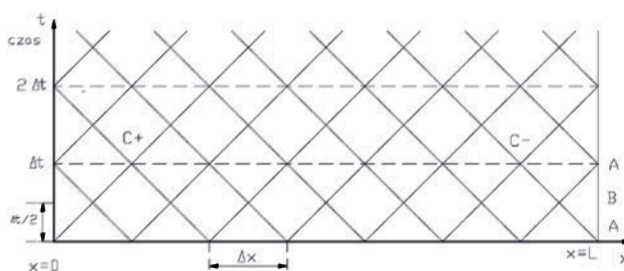
$$p_{B,j} - p_{A,j} + \alpha_4 [Q_{NB,j} - Q_{NA,j}] + 0.5 \alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,j} |Q_{NB,j}|}{p_{B,j}} + \frac{Q_{NA,j} |Q_{NA,j}|}{p_{A,j}} \right] = 0 \quad (3.9)$$

$$p_{B,j} - p_{A,j+1} - \alpha_4 [Q_{NB,j} - Q_{NA,j+1}] - 0.5 \alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,j} |Q_{NB,j}|}{p_{B,j}} + \frac{Q_{NA,j+1} |Q_{NA,j+1}|}{p_{A,j+1}} \right] = 0 \quad (3.10)$$

gdzie: $\alpha_4 = \frac{\rho_N c}{A}$,
 $\alpha_5 = \frac{2f}{D} \left(\frac{\rho_N c^2}{A} \right)^2 dx$
 $j = 0, 1, 2, \dots, J-1.$

Wykres charakterystyk przedstawiono na rys.1, gdzie:

p_B = ciśnienie w warstwie B; Q_{NB} = przepływ w warstwie B;
 p_A = ciśnienie w warstwie A; Q_{NA} = przepływ w warstwie A;



Rys.1. Siatka charakterystyk
 Fig. 1. The grid of characteristics

Po przekształceniach otrzymujemy wzór na obliczenie ciśnień w warstwie pośredniej B:

$$p_{B,j} = 0.5 [p_{A,j} + p_{A,j+1}] + 0.5 \alpha_4 [Q_{NA,j} - Q_{NA,j+1}] + 0.25 \alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,j+1} |Q_{NA,j+1}|}{p_{A,j+1}} - \frac{Q_{NA,j} |Q_{NA,j}|}{p_{A,j}} \right] \quad (3.11)$$

Z kolei wartości przepływów w warstwie B obliczać można z równania:

$$0.5 \alpha_5 Q_{NB,j}^2 + p_{B,j} \alpha_4 Q_{NB,j} + p_{B,j} \left[p_{B,j} - p_{A,j} - \alpha_4 Q_{NA,j} + 0.5 \frac{Q_{NA,j} |Q_{NA,j}|}{p_{A,j}} \right] = 0 \quad (3.12)$$

Wartości ciśnień i przepływów w warstwie A obliczamy z zależności:

$$p_{A,0} = p_{B,0} + \alpha_4 [Q_{NB,0} - Q_{NA,0}] \quad (3.13)$$

$$\text{dla } j=0 \quad + 0.5 \alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,0} |Q_{NB,0}|}{p_{B,0}} + \frac{Q_{NA,0} |Q_{NA,0}|}{p_{A,0}} \right]$$

dla $j=J$

$$p_{A,J} = p_{B,J-1} - \alpha_4 [Q_{NA,J} - Q_{NB,J-1}] - 0.5 \alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,J-1} |Q_{NB,J-1}|}{p_{B,J-1}} + \frac{Q_{NA,J} |Q_{NA,J}|}{p_{A,J}} \right] \quad (3.14)$$

Równania (3.7) i (3.8) można również zapisać w następującej formie:

$$p_{A,j} - p_{B,j} + \alpha_4 [Q_{NA,j} - Q_{NB,j}] + 0.5\alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,j}|Q_{NA,j}|}{p_{A,j}} + \frac{Q_{NB,j}|Q_{NB,j}|}{p_{B,j}} \right] = 0 \quad (3.15)$$

$$p_{A,j} - p_{B,j-1} - \alpha_4 [Q_{NA,j} - Q_{NB,j-1}] - 0.5\alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,j}|Q_{NA,j}|}{p_{A,j}} + \frac{Q_{NB,j-1}|Q_{NB,j-1}|}{p_{B,j-1}} \right] = 0 \quad (3.16)$$

Przekształcając równania (3.15) i (3.16) otrzymujemy:

$$p_{A,j} = 0.5 [p_{B,j} + p_{B,j-1}] + 0.5\alpha_4 [Q_{NB,j} - Q_{NB,j-1}] + 0.25\alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,j-1}|Q_{NB,j-1}|}{p_{B,j-1}} - \frac{Q_{NB,j}|Q_{NB,j}|}{p_{B,j}} \right] \quad (3.17)$$

Z powyższego równania możemy już bezpośrednio wyznaczyć ciśnienia $p_{A,j}$ dla $j=1, 2, \dots, J-1$. Natomiast przepływy $Q_{NA,j}$ można obliczyć z równań (3.15) lub (3.16) wykorzystując równanie (3.17).

Równania (3.7) i (3.8) można także przekształcić do następującej formy

$$p_{B,j} - p_{A,j} + \alpha_4 [Q_{NB,j}^k - Q_{NA,j}^k] + \alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j}^{k-1}}{p_{B,j}^{k-1} + p_{A,j}^{k-1}} \left(\frac{Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j}^{k-1}}{2} \right) \right] = 0 \quad (3.18)$$

$$p_{B,j} - p_{A,j+1} - \alpha_4 [Q_{NB,j}^k - Q_{NA,j+1}^k] - \alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j+1}^{k-1}}{p_{B,j}^{k-1} + p_{A,j+1}^{k-1}} \left(\frac{Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j+1}^{k-1}}{2} \right) \right] = 0 \quad (3.19)$$

gdzie k - numer iteracji.

Dodając równania (3.18) i (3.19) otrzymujemy:

$$p_{B,j}^k = 0.5 \{ p_{A,j} + p_{A,j+1} + \alpha_4 [Q_{NA,j} - Q_{NA,j+1}] + 0.5\alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j+1}^{k-1}}{p_{B,j}^{k-1} + p_{A,j+1}^{k-1}} (Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j+1}^{k-1}) - \frac{Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j}^{k-1}}{p_{B,j}^{k-1} + p_{A,j}^{k-1}} (Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j}^{k-1}) \right] \} \quad (3.20)$$

Z kolei, jeśli przekształcimy równanie (3.19) otrzymamy:

$$Q_{NB,j}^k = Q_{NA,j+1} + \frac{1}{\alpha_4} [p_{B,j}^k - p_{A,j+1}] - 0.5\alpha_5 \left[\frac{Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j+1}^{k-1}}{p_{B,j}^{k-1} + p_{A,j+1}^{k-1}} (Q_{NB,j}^{k-1} + Q_{NA,j+1}^{k-1}) \right] \quad (3.21)$$

Równania (3.20) i (3.21) wykorzystywane są do liczenia ciśnień i przepływów w warstwie B.

Ciśnienia oraz przepływy w warstwie A są obliczane z następujących zależności:

$$\text{dla } j=0 \quad p_{A,0}^k = p_{B,0} + \alpha_4 [Q_{NA,0}^k - Q_{NB,0}^k] + \alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,0}^{k-1} + Q_{NB,0}^{k-1}}{p_{A,0}^{k-1} + p_{B,0}^{k-1}} \left(\frac{Q_{NA,0}^{k-1} + Q_{NB,0}^{k-1}}{2} \right) \right] \quad (3.22)$$

$$Q_{NA,0}^k = Q_{NB,0} + \frac{1}{\alpha_4} [p_{A,0} - p_{B,0}] - 0.5\alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,0}^{k-1} + Q_{NB,0}^{k-1}}{p_{A,0} + p_{B,0}} (Q_{NA,0}^{k-1} + Q_{NB,0}^{k-1}) \right] \quad (3.23)$$

dla $j=J$

$$p_{A,J}^k = p_{B,J-1} - \alpha_4 [Q_{NA,J}^k - Q_{NB,J-1}^k] - \alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,J}^{k-1} + Q_{NB,J-1}^{k-1}}{p_{A,J}^{k-1} + p_{B,J-1}^{k-1}} \left(\frac{Q_{NA,J}^{k-1} + Q_{NB,J-1}^{k-1}}{2} \right) \right] \quad (3.24)$$

$$Q_{NA,J}^k = Q_{NB,J-1} - \frac{1}{\alpha_4} [p_{A,J} - p_{B,J-1}] + 0.5\alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,J}^{k-1} + Q_{NB,J-1}^{k-1}}{p_{A,J} + p_{B,J-1}} (Q_{NA,J}^{k-1} + Q_{NB,J-1}^{k-1}) \right] \quad (3.25)$$

Natomiast ciśnienia i przepływy w punktach $j=1, 2, \dots, J-1$ wynikają z relacji:

$$p_{A,j}^k = 0.5 \{ p_{B,j} + p_{B,j-1} - \alpha_4 [Q_{NB,j} - Q_{NB,j-1}] - 0.5\alpha_5 \left[-\frac{Q_{NA,j}^{k-1} + Q_{NB,j}^{k-1}}{p_{A,j}^{k-1} + p_{B,j}^{k-1}} (Q_{NA,j}^{k-1} + Q_{NB,j}^{k-1}) + \frac{Q_{NA,j}^{k-1} + Q_{NB,j-1}^{k-1}}{p_{A,j}^{k-1} + p_{B,j-1}^{k-1}} (Q_{NA,j}^{k-1} + Q_{NB,j-1}^{k-1}) \right] \} \quad (3.26)$$

oraz

$$Q_{NA,j}^k = Q_{NB,j} + \frac{1}{\alpha_4} \{ p_{A,j}^k - p_{B,j} - 0.5\alpha_5 \left[\frac{Q_{NA,j}^{k-1} + Q_{NB,j}^{k-1}}{p_{A,j}^{k-1} + p_{B,j}^{k-1}} (Q_{NA,j}^{k-1} + Q_{NB,j}^{k-1}) \right] \} \quad (3.27)$$

4. Zastosowanie metody prostych do symulacji nieustalonego przepływu gazu

Metoda prostych zajmuje miejsce pośrednie pomiędzy metodami analitycznymi a metodą różnic skończonych. Istota tej metody polega na tym, że pochodne względem jednej ze zmiennych zastępuje się przybliżającymi je różnicami skończonymi, a pochodne względem pozostałych zmiennych pozostawia bez zmian.

W ten sposób dane równanie różniczkowe zostaje zastąpione układem równań różniczkowych zawierających mniejszą liczbę zmiennych niezależnych.

Można sprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych zarówno liniowe (jak również nieliniowe) równanie wyższego rzędu, a także układ równań różniczkowych cząstkowych.

Łatwo również przenieść metodę prostych na przypadek większej liczby zmiennych niezależnych.

Jeżeli przyjmiemy warunki brzegowe : $p(x,0)=p_0$ oraz $QJ(t)=f(t)$, to przyjmując trzypunktową aproksymację wstecz, układ równań (3.1) może zostać zapisany za pomocą następujących zależności:

$$\frac{\partial p(x_j,t)}{\partial t} = \frac{\alpha_1}{2\Delta x} (-Q_{N,j-2}(t) + 4Q_{N,j-1}(t) - 3Q_{N,j}(t)) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial Q_N(x_0,t)}{\partial t} = -\frac{\alpha_2}{2\Delta x} (3p_0(t) - 4p_1(t) + p_2(t)) - \alpha_3 \frac{|Q_{N,0}|Q_{N,0}}{p_0}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p(x_j,t)}{\partial t} &= \frac{\alpha_1}{2\Delta x} (-Q_{N,j-1}(t) - Q_{N,j+1}(t)) \\ \frac{\partial Q_N(x_j,t)}{\partial t} &= -\frac{\alpha_2}{2\Delta x} (p_{j-1}(t) - p_{j+1}(t)) - \alpha_3 \frac{|Q_{N,j}|Q_{N,j}}{p_j} \end{aligned} \right\} \text{ dla } j=1,2,\dots,(J-1)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań, czyli znalezienie odpowiednich wartości ciśnień i przepływów w przewodzie, prowadzi jednak do dużych niedokładności. Okazuje się bowiem, że takie przybliżenie pochodnych pierwszego rzędu nie jest odpowiednio dokładne dla symulacji nieustalonego przepływu gazu. Przyjęty model "nie

radzi" sobie z szybkimi zmianami sygnałów wejściowych, którymi są zmienne w czasie obciążenia sieci gazowej.

Istnieją jednak inne metody aproksymacji, które spełniają wymagania dokładności opisu szybkozmiennego przepływu gazu. Są to schematy, które wykorzystują większą liczbę punktów siatki i dają przez to dokładniejsze wyniki.

Wprowadzimy nowe zmienne:

$$p_1 = p + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_N \quad p_2 = p - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_N \quad (4.2)$$

Wyjściowy układ równań (3.1) możemy teraz przekształcić do następującej postaci:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial p_1}{\partial x} &= -\alpha_3 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{|Q_N| Q_N}{p} \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} &= \alpha_3 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{|Q_N| Q_N}{p} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

gdzie: $p = (p_1 + p_2) \times 0,5$

$$Q_N = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} (p_1 - p_2) \times 0,5$$

Równania (4.3) zawierają człon nazywany członem „transportowym” lub członem „konwekcji” o postaci:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.4)$$

Jeżeli do aproksymacji zastosujemy dwupunktowy schemat różnicowy wyrażony jako:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_j} \cong \frac{p(x_{j+1}, t) - p(x_j, t)}{\Delta x} \quad \text{dla } w < 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_j} \cong \frac{p(x_j, t) - p(x_{j-1}, t)}{\Delta x} \quad \text{dla } w > 0$$

gdzie w jest prędkością przepływu (jeśli $w > 0$, to oznacza przepływ w kierunku dodatnim - od lewej do prawej, jeśli $w < 0$, to oznacza przepływ w kierunku ujemnym - od prawej do lewej), to okaże się, że rozwiązanie równania (4.4) obarczone będzie dużym błędem, ponieważ taka prosta aproksymacja w przypadku równań hiperbolicznych nie oddaje istoty zjawiska niustalonego przepływu gazu, który cechują szybkie i częste zmiany obciążenia.

W [3] zaproponowano zupełnie nowy rodzaj aproksymacji różnicowej, specjalnie dostosowany do charakteru zjawiska i pozwalający uniknąć podobnych trudności. Stanowi on połączenie aproksymacji wstecz i centralnej, tworząc tzw. "Biased Upwind Approximation", co można przetłumaczyć jako "skośną aproksymację wsteczną". Skośną, ponieważ wykorzystuje jeden punkt w kierunku dodatnim, a pozostałe w kierunku ujemnym. Poniżej przedstawiono skośne aproksymacje wsteczne wykorzystujące odpowiednio na cztery i pięć punktów siatki.

Czteropunktowa skośna aproksymacja wsteczna:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_0} \cong \frac{-11p(x_0, t) + 18p(x_1, t) - 9p(x_2, t) + 2p(x_3, t)}{6 \Delta x} + O\{(\Delta x)^3\} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_1} \cong \frac{-2p(x_{j-3}, t) + 9p(x_{j-2}, t) - 18p(x_{j-1}, t) + 11p(x_j, t)}{6 \Delta x} + O\{(\Delta x)^3\} \quad (4.6)$$

dla $w > 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_1} \cong \frac{-2p(x_0, t) - 3p(x_1, t) + 6p(x_2, t) - p(x_3, t)}{6 \Delta x} + O\{(\Delta x)^3\} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_1} \cong \frac{2p(x_{j-2}, t) - 6p(x_{j-1}, t) + 3p(x_j, t) + 2p(x_{j+1}, t)}{6 \Delta x} + O\{(\Delta x)^3\} \quad (4.8)$$

($2 \leq j \leq (J-1)$)

dla $w < 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_j} \cong \frac{-3p(x_{j-1}, t) - 10p(x_j, t) + 18p(x_{j+1}, t) - 6p(x_{j+2}, t) + p(x_{j+3}, t)}{12 \Delta x} \quad (4.9)$$

+ $O\{(\Delta x)^4\}$ ($1 \leq j \leq (J-3)$)

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_{j-2}} \cong \frac{p(x_{j-6}, t) - 8p(x_{j-5}, t) + 8p(x_{j-3}, t) - p(x_{j-2}, t)}{12 \Delta x} + O\{(\Delta x)^4\} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_{j-1}} \cong \frac{-p(x_{j-5}, t) + 6p(x_{j-4}, t) - 18p(x_{j-3}, t) + 10p(x_{j-2}, t) + 3p(x_{j-1}, t)}{12 \Delta x}$$

+ $O\{(\Delta x)^4\}$

Pięciopunktowa skośna aproksymacja wsteczna:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_0} \cong \frac{-25p(x_0, t) + 48p(x_1, t) - 36p(x_2, t) + 16p(x_3, t) - 3p(x_4, t)}{12 \Delta x} + O\{(\Delta x)^4\} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_1} \cong \frac{3p(x_{j-4}, t) - 16p(x_{j-3}, t) + 36p(x_{j-2}, t) - 48p(x_{j-1}, t) + 25p(x_j, t)}{12 \Delta x}$$

+ $O\{(\Delta x)^4\}$

dla $w > 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_1} \cong \frac{3p(x_0, t) - 10p(x_1, t) + 18p(x_2, t) - 6p(x_3, t) + p(x_4, t)}{12 \Delta x} + O\{(\Delta x)^4\} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_2} \cong \frac{p(x_0, t) - 8p(x_1, t) + 8p(x_3, t) - p(x_4, t)}{12 \Delta x} + O\{(\Delta x)^4\} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_3} \cong \frac{-p(x_{j-3}, t) + 6p(x_{j-2}, t) - 18p(x_{j-1}, t) + 10p(x_j, t) + 3p(x_{j+1}, t)}{12 \Delta x}$$

+ $O\{(\Delta x)^4\}$

($3 \leq j \leq (J-1)$)

dla $w < 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_j} \cong \frac{-3p(x_{j-1}, t) - 10p(x_j, t) + 18p(x_{j+1}, t) - 6p(x_{j+2}, t) + p(x_{j+3}, t)}{12 \Delta x} \quad (4.16)$$

+ $O\{(\Delta x)^4\}$ ($1 \leq j \leq (J-3)$)

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_{j-2}} \cong \frac{p(x_{j-6}, t) - 8p(x_{j-5}, t) + 8p(x_{j-3}, t) - p(x_{j-2}, t)}{12 \Delta x} + O\{(\Delta x)^4\} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x_{j-1}} \cong \frac{-p(x_{j-5}, t) + 6p(x_{j-4}, t) - 18p(x_{j-3}, t) + 10p(x_{j-2}, t) + 3p(x_{j-1}, t)}{12 \Delta x}$$

+ $O\{(\Delta x)^4\}$

Zastępując w równaniu (4.3) różniczki $\frac{\partial}{\partial x}$ odpowiednimi wyrażeniami wynikającymi z zastosowania cztero-, lub pięciopunktowej skośnej aproksymacji wstecznej otrzymamy następujący układ równań:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d p_{1,j}}{d t} + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \Delta_x^+ p_{1,j} &= -\alpha_3 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{|Q_{N,j}| Q_{N,j}}{p_j} \\ \frac{d p_{2,j}}{d t} - \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \Delta_x^- p_{2,j} &= \alpha_3 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \frac{|Q_{N,j}| Q_{N,j}}{p_j} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

$j = 0, 1, \dots, J$

gdzie: Δ_x^+ jest operatorem różnicowym dla przypadku $w > 0$
 Δ_x^- jest operatorem różnicowym dla przypadku $w < 0$

Jeśli teraz, tak jak w równaniu (4.2), przyjmiemy w równaniach (4.19) nowe zmienne p_1 i p_2 :

$$p_1 = p + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_N \quad p_2 = p - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_N$$

to po dodaniu stronami otrzymamy wyrażenie:

$$\frac{dp_j}{dt} = -\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (\Delta_x^+ - \Delta_x^-) p_j - 0.5 \alpha_1 (\Delta_x^+ - \Delta_x^-) Q_{N,j} \quad (4.20)$$

Jeżeli natomiast odpowiednio odejmiemy stronami (4.19) otrzymamy:

$$\frac{dQ_{N,j}}{dt} = -0.5 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} (\Delta_x^+ - \Delta_x^-) Q_{N,j} - 0.5 \alpha_2 (\Delta_x^+ + \Delta_x^-) p_j - \alpha_3 \frac{|Q_{N,j}| Q_{N,j}}{p_j} \quad (4.21)$$

Równania (4.20) i (4.21) przekształcić możemy do następującej postaci:

$$\frac{dp_j}{dt} = -0.5 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \left[\Delta_x^+ \left(p_j + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j} \right) - \Delta_x^- \left(p_j - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j} \right) \right] \quad (4.22)$$

$$\frac{dQ_{N,j}}{dt} = -0.5 \alpha_2 \left[\Delta_x^+ \left(p_j + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j} \right) - \Delta_x^- \left(p_j - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j} \right) \right] - \alpha_3 \frac{|Q_{N,j}| Q_{N,j}}{p_j} \quad (4.23)$$

Operatory różnicowe Δ_x^+ i Δ_x^- dane są równaniami (4.5) - (4.10). Jeżeli do powyższych równań zastosujemy metodę Euler'a, według której:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \times f[x(t)] \quad (4.24)$$

to otrzymamy końcową postać wzorów metody prostych do obliczenia ciśnienia i przepływów wzdłuż gazociągu:

$$p_j(t + \Delta t) = p_j(t) + 0.5 \Delta t \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \left[\Delta_x^- \left(p_j(t) - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j}(t) \right) + \Delta_x^+ \left(p_j(t) - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j}(t) \right) \right] \quad (4.25)$$

dla $j=1, 2, \dots, J$

$$Q_{N,j}(t + \Delta t) = Q_{N,j}(t) - 0.5 \Delta t \alpha_2 \left[\Delta_x^- \left(p_j(t) - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j}(t) \right) + \Delta_x^+ \left(p_j(t) + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} Q_{N,j}(t) \right) \right] \quad (4.26)$$

dla $j=0, 1, 2, \dots, J-1$

gdzie Δt jest krokiem całkowania.

5. Badania symulacyjne

Do porównania efektywności numerycznej metody charakterystyk i metody prostych posłużył przykład symulacji prostej rury z warunkami brzegowymi PQ (znane, ustalone ciśnienie na początku i zmienne w czasie obciążenie na końcu). Analizowane były trzy przypadki zmiennego obciążenia przewodu. Program do symulacji za pomocą metody prostych przygotowano w dwóch wersjach. W pierwszej wykorzystano procedurę całkującą Runge'go-Kutty drugiego rzędu, w drugiej czwartego rzędu.

Wielkościami porównywanymi były:

- czas trwania obliczeń,
- dokładność obliczeń,
- krok po czasie (czas całkowania),
- krok zmiennej przestrzennej (długość przedziału dyskretyzacji).

Dane przyjęte do symulacji

We wszystkich trzech przypadkach przyjęte zostały identyczne dane dotyczące warunków symulacji i właściwości fizycznych gazu.

całkowity czas symulacji	T = 26h
długość gazociągu	L = 45 000 m
współczynnik oporów liniowych wg. Fanning'a	f = 0.003
gęstość gazu	$\rho = 0.75 \text{ kg/m}^3$
prędkość dźwięku w gazie	c = 300 m/s

Obciążenie zadawane było w postaci dyskretnych wartości podanych w m^3/s co 2h czasu rzeczywistego. W chwilach czasowych pomiędzy tymi dyskretnymi punktami wartość chwilowego obciążenia przyjmowana była w oparciu o interpolację liniową.

Wszystkie obliczenia wykonywane były dla dwóch wartości średnic wewnętrznych przewodu: 600mm i 900mm.

Metoda charakterystyk

W metodzie charakterystyk przyjęto, że:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = c \quad (5.1)$$

czyli $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$

W przypadku symulacji sieci gazowej, metoda charakterystyk narzuca stałą wartość Δx we wszystkich odcinkach tej sieci. Stąd długość odcinka dyskretyzacji nie może być wartością zbyt dużą, bo wyznaczona jest przez najkrótsze odcinki w symulowanej sieci. Jest to poważne ograniczenie, ponieważ mała wartość Δx narzuca krótki czas całkowania Δt , co z kolei powoduje wydłużanie czasu obliczeń. W przypadku pojedynczego przewodu nie stanowi to wprawdzie dużego problemu, ale w przypadku symulacji sieci zbyt długi czas obliczeń czyni metodę charakterystyk mało atrakcyjną.

W rozpatrywanym przypadku, długość rury podzielona została na 30 odcinków po 1500m każdy. Równanie (5.1), dla $\Delta x=1500\text{m}$, jednoznacznie określa krok po czasie $\Delta t=5\text{sek}$.

Dla tych warunków symulowane były trzy przypadki zmian obciążenia na końcu przewodu o długości L. W każdym z trzech przykładów, obliczenia wykonane zostały dla dwóch wartości średnic. Wyniki symulacji przedstawione są odpowiednio na rys. 2, 3 i 4.

Dla $\Delta x=9000\text{m}$ krok całkowania wynosi $\Delta t=30\text{sek}$. W tym przypadku czas obliczeń dla symulowanego przypadku znacznie się zmniejszył, bez zauważalnej zmiany dokładności. Trzeba jednak pamiętać, że w przypadku symulacji rozbudowanej sieci gazowej przyjęcie dla wszystkich odcinków $\Delta x=9000\text{m}$ jest sytuacją czysto teoretyczną.

Metoda prostych

W metodzie prostych nie istnieją ograniczenia typu (5.1). Pozwala to na zwiększanie kroku po czasie, a tym samym skracanie czasu obliczeniowego, aż do momentu, w którym osiągniemy krytyczny krok całkowania Δt_{kryt} , po przekroczeniu którego gwałtownie zmniejszona zostaje dokładność obliczeń. Dalsze zwiększanie kroku po czasie powoduje rozbieżność metody. To samo dotyczy przypadku zwiększania długości przedziału dyskretyzacji Δx , co oczywiście również skracają czas obliczeń.

Opisany proces realizowany był dla dwóch wariantów metody prostych, wykorzystujących drugi i czwarty rząd formuły Runge'go-Kutty.

Formuła Runge'go-Kutty drugiego rzędu, w której przyjęto $a=1$, $\alpha=1$, $R_1=R_2=0.5$, dana jest wzorami:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t f(x_0, y_0) \\ k_2 &= \Delta t f(x_0 + \Delta t, y_0 + k_1) \\ y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdzie:

$f(x_0, y_0)$ - wartość funkcji (ciśnienia lub przepływu) w chwili $t=t_0$,

y_1 - wartość funkcji w następnej chwili czasowej $T=t+\Delta t$,

Δt - krok po czasie.

W drugiej wersji programu wykorzystane zostały równania formuły czwartego rzędu.

Formuła Runge'go-Kutty czwartego rzędu, w której przyjęto następujące wartości współczynników: $a=b=0.5$, $c=1$, $\alpha=0.5$, $\beta=0$, $\gamma=0.5$, $\delta=\epsilon=0$, $\zeta=1$ oraz $R_1=R_4=1/6$, $R_2=R_3=1/3$, dana jest równaniami:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \Delta t f(x_0, y_0) \\
 k_2 &= \Delta t f(x_0 + \Delta t/2, y_0 + k_1/2) \\
 k_3 &= \Delta t f(x_0 + \Delta t/2, y_0 + k_2/2) \\
 k_4 &= \Delta t f(x_0 + \Delta t, y_0 + k_3) \\
 y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)
 \end{aligned}
 \quad (5.3)$$

(W opisie przyjęto oznaczenia:

RK2 - dla metody Runge'go-Kutty drugiego rzędu

RK4 - dla metody Runge'go-Kutty czwartego rzędu)

Pierwszą testowaną wersją programu dla metody prostych była procedura wykorzystująca metodę RK2. Dla identycznych warunków, jakie przyjęto dla metody charakterystyk ($\Delta x=1500$ oraz $\Delta t=5$ sek). Otrzymane wyniki były dokładnie takie same, jak te przedstawione na rysunkach 2, 3 i 4. Świadczyły to o poprawności działania procedury. Następnie zwiększano Δt oraz Δx . Czas obliczeniowy sukcesywnie malał, natomiast nie zaobserwowano utraty dokładności (maksymalny błąd względny w odniesieniu do wyników symulacji metodą charakterystyk był rzędu 0.001%). Proces ten kontynuowany był aż do osiągnięcia wartości krytycznych, które wynosiły odpowiednio:

$$\begin{aligned}
 \Delta t_{\text{kryt}}(\text{RK2}) &= 55 \text{ sek} \\
 \Delta x_{\text{kryt}}(\text{RK2}) &= 15000 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Oznaczało to podział długości L na trzy odcinki z czterema punktami dyskretyzacji.

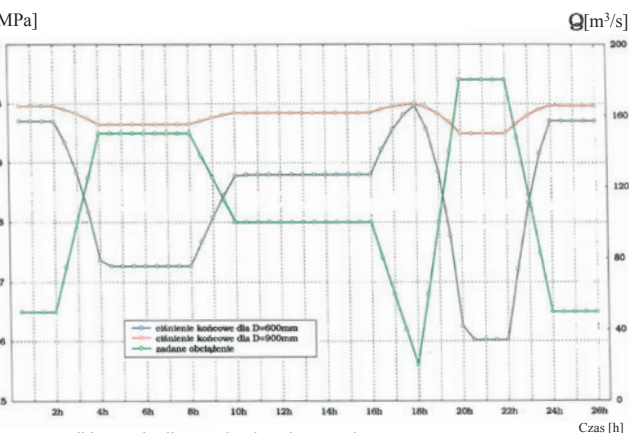
Czas trwania obliczeń dla warunków krytycznych zredukowany został do $T=5$ sek.

Dokładność obliczeń: 0.4%.

Przekroczenie obydwu wartości krytycznych powodowało rozbieżność metody.

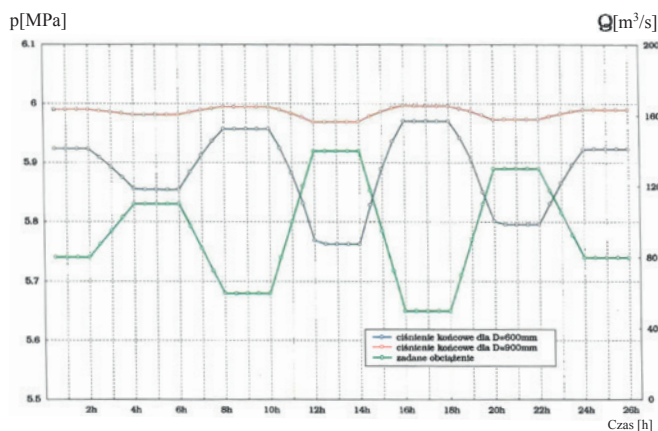
Jako druga testowana była wersja metody prostych wykorzystująca algorytm RK4. Dla warunków ($\Delta x=1500$ oraz $\Delta t=5$ sek) otrzymane wyniki były takie same jak te przedstawione na rysunkach 2, 3 i 4. Następnie stopniowo zwiększano Δt i Δx . Czas obliczeniowy sukcesywnie malał, natomiast (podobnie jak w przypadku RK2) nie zaobserwowano utraty dokładności uzyskiwanych wyników. Po osiągnięciu poprzednio wyznaczonych wartości krytycznych, dla RK2, czas trwania obliczeń dla dwóch wersji metody prostych wyrównał się. W celu porównania prostszej wersji RK2 z bardziej skomplikowaną, ale przez to dokładniejszą RK4 wartość Δx pozostawiono na poziomie $\Delta x_{\text{kryt}}(\text{RK2})=15000\text{m}$, natomiast dalej zwiększany był krok po czasie Δt . Proces ten kontynuowany był aż do osiągnięcia wartości:

$$\Delta t_{\text{kryt}}(\text{RK4}) = 80 \text{ sek}$$



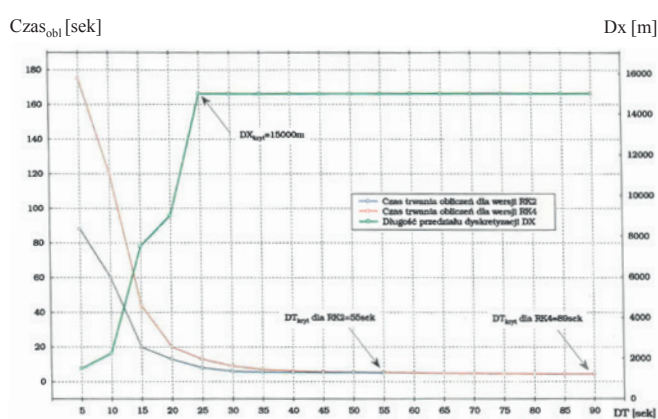
Rys. 3 Wyniki symulacji metodą charakterystyk

Fig.3 Results of simulation using the method of characteristics



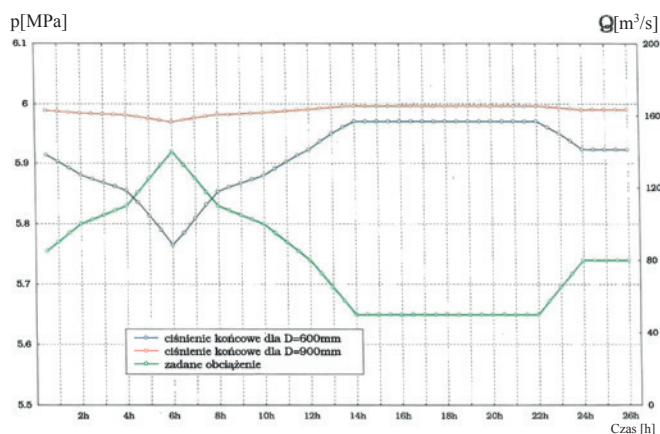
Rys. 4 Wyniki symulacji metodą charakterystyk

Fig.4 Results of simulation using the method of characteristics



Rys. 5 Wyniki symulacji metodą prostych

Fig. 5 Results of simulation using the method of lines



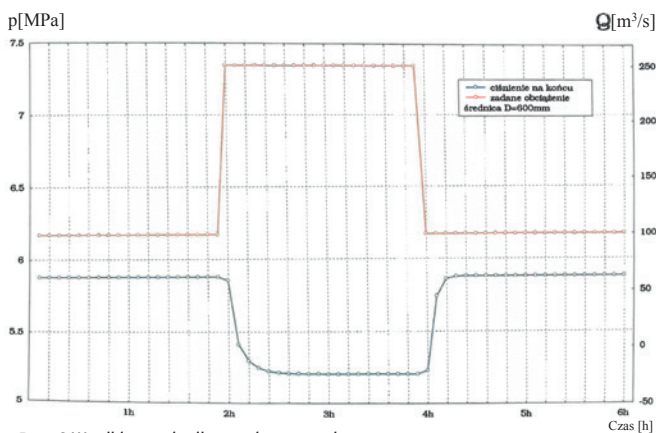
Rys. 2 Wyniki symulacji metodą charakterystyk

Fig. 2 Results of simulation using the method of characteristics

W celu udowodnienia poprawności wyników otrzymanych za pomocą metody prostych testowano zachowanie się tego samego odcinka wprowadzając zakłócenie, jakim jest zmiana obciążenia na końcu gazociągu o 150% w porównaniu z wartością wyjściową (od 100m³/s do 250m³/s), a następnie powracając do wartości początkowej.

Symulację wykonano metodą prostych z wykorzystaniem algorytmu RK4.

Wyniki przedstawione są na rys. 6.



Rys. 6 Wyniki symulacji metodą prostych

Fig.6 Results of simulation using the method of lines

6. Wnioski

Z przeprowadzonych badań wynikają następujące wnioski:

- Obydwie metody zostały z powodzeniem wykorzystane do symulacji nieustalonego przepływu gazu w pojedynczej, prostej rurze, dając poprawne wyniki.
- W przypadku symulacji metodą charakterystyk napotykamy poważne ograniczenie w sposób sztywny wiążące Δx i Δt z prędkością dźwięku w gazie.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c$$

c) W metodzie charakterystyk przyjęta jest jedna, wspólna długość przedziału dyskretyzacji, która obowiązuje w całej symulowanej sieci. Fakt ten przesądza o konieczności doboru odpowiednio małego Δx , który wynika ze struktury sieci gazowej. Z kolei przyjęcie niewielkiego przedziału dyskretyzacji w sposób sztywny ogranicza maksymalny dopuszczalny krok całkowania. Konsekwencją jest wydłużanie całkowitego czasu trwania obliczeń z powodu małego kroku po czasie.

d) Metoda prostych jest zdecydowanie bardziej elastyczna. Pozwala na płynne zmienianie kroku całkowania i długości przedziału dyskretyzacji. Właściwie jedynym ograniczeniem jest tu wymagana dokładność obliczeń związana z przyjętą wersją metody. Spostrzeżenia te zostały całkowicie potwierdzone w trakcie symulacji wykonanych za pomocą dwóch wariantów metody prostych.

e) Podczas gdy metoda charakterystyk w opisanej wersji nie pozwala na wprowadzenie poważnych zmian poprawiających jej efektywność numeryczną, metoda prostych umożliwia wykorzystywanie różnych wariantów. Można na przykład w miejsce czteropunktowej aproksymacji wstecznej zastosowanej do tej analizy wykorzystać pięciopunktową aproksymację wsteczną, opisaną w rozdziale piątym niniejszej pracy. Można także zastosować jeszcze bardziej złożony schemat wykorzystujący 8, czy nawet 16 punktów siatki metody prostych. Pozwoliłoby to w sposób znaczny zwiększyć dokładność i efektywność metody.

Z powyższych spostrzeżeń wynika, że metoda prostych jest bardzo elastyczną metodą, która może być cennym narzędziem służącym do efektywnego modelowania nieustalonego przepływu gazu.

LITERATURA

- [1] Carver M.B, Hinds, H,W: „The method of lines and the advective equation, Simulation Councils, Inc., August 1978.
- [2] Osiadacz A.J. Simulation and Analysis of Gas Networks, E & F.N.Spon Ltd. London 1987.
- [3] Schiesser W.E. The numerical method of lines, Academic Press, Inc. London, 1991.